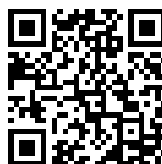
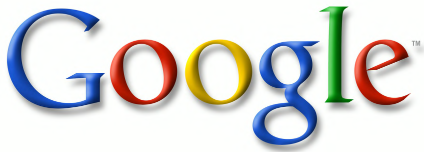
This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

http://books.google.com





Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.





Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

NOV 2 1892

//

Ueber trilineare & tetraedrale Kollineation.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

der

Hohen philosophischen Fakultät

der

Grossherzoglich Hessischen Ludewigs-Universität Giessen

vorgelegt von

Karl Uhrig

in Friedberg.

Mit einer Tafel.



Giessen 1891.

Curt v. Münchow, Universitäts-Buch- und Steindruckerei.

Digitized by Google

Digitized by Google

Herrn Prof. Dr. Pasch, auf dessen Anraten ich diese Arbeit unternommen, sage ich für die mir bei ihrer Abfassung gegebenen Winke und Ratschläge meinen innigsten Dank.

Digitized by Google

Digitized by Google

Einleitung.

In Schröters „Theorie d. Oberfl. II. O." findet sich in § 47 der Satz bewiesen:

„Wenn man bei zwei auf einander liegenden kollinearen „Ebenen in trilinearer Lage zwei cyklisch auf einander „liegende Dreiecke auffaßt, so liegen dieselben auf drei „verschiedene Arten perspektivisch, d. h. so, daß drei Ver-„bindungslinien ihrer Ecken durch einen Punkt laufen. Die „drei dadurch erhaltenen Perspektivitätscentra bilden ein „drittes Dreieck, welches gleichfalls aus drei cyklisch auf „einander liegenden entsprechenden Punktepaaren der bei-„den kollinearen Ebenen besteht. Solche drei Dreiecke „bilden eine in sich zurückkehrende Gruppe, indem je „zwei dieser drei Dreiecke dreimal perspektivisch liegen, „und die drei Perspektivitätscentra die Ecken des dritten „Dreiecks sind."

Derselbe Verfasser zeigt in einer Abhandlung „Ueber perspektivisch liegende Dreiecke" (Math. Annalen II. vgl. Rosanes an dems. Ort), daß es auch vier- und sechsfach perspektive Dreiecke giebt, welche später auch von Vályi (Grunerts Archiv 70) der Untersuchung unterworfen sind. Es entsteht nun die Frage, ob es auch bei der trilinearen Kollineation vier- und sechsfach perspektive Cyklen giebt.

Digitized by Google

Der erste Teil der vorliegenden Arbeit bringt zunächst die synthetischen Beweise dieser Vályi'schen Sätze (§ 1, 3) und zeigt dann die Möglichkeit der Konstruktion von vier- (§ 2) und sechsfach (§ 4) perspektiven Cyklen der trilinearen Kollineation.

Im zweiten Abschnitt werden dann die Untersuchungen auf den Raum, nämlich auf die tetraedrale Kollineation (Erklärung s. § 5 S. 18) ausgedehnt. Es wird sich zunächst fragen, ob es Paare von Cyklen giebt, welche perspektiv liegen. Nach Vályi (Archiv 2. R. 1886 S. 441 ff.) giebt es ein-, zwei- und vierfach perspektive eigentliche Tetraeder. Es wird nun gezeigt (§ 5), daß es auch ein-, zwei- und vierfach perspektive Cyklen giebt, und es wird weiter die Aufgabe gelöst, zu einem gegebenen Cyklus diejenigen zu konstruieren, welche mit ihm in ein-, zwei- und vierfacher Perspektivität stehen (§ 6, 7, 8). In dem letzten Abschnitt werden noch mehrfach hyperboloidische Cyklen behandelt. Anschließend an eine Abhandlung von Schur (Math. Ann. XX), in welcher die Möglichkeit von fünf-, acht- und neunfach hyperboloidischen Tetraedern nachgewiesen ist, wird gezeigt, daß auch fünf- und neunfach hyperboloidische Lage zweier Cyklen eintreten kann.

Erster Abschnitt.

Mehrfach perspektive Cyklen der trilinearen Kollineation.

§ 1. Vierfach perspektive Dreiecke.

In einer Ebene seien gegeben zwei Dreiecke

$\mathfrak{abc}$ und $\mathfrak{lmn}$

in vierfach perspektiver Lage. Die vier Perspektivitätscentren seien:

Digitized by Google

I. 1. $\mathfrak{x} = (\mathfrak{al}, \mathfrak{bn}, \mathfrak{cm})$ 3. $\mathfrak{z} = (\mathfrak{am}, \mathfrak{bl}, \mathfrak{cn})$
2. $\mathfrak{y} = (\mathfrak{an}, \mathfrak{bm}, \mathfrak{cl})$ 4. $\mathfrak{p} = (\mathfrak{al}, \mathfrak{bm}, \mathfrak{cn})$

Da hiernach $\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{al}$, $\mathfrak{y}$ auf $\mathfrak{an}$ und $\mathfrak{z}$ auf $\mathfrak{am}$ liegt, so muß $\mathfrak{a}$ der Schnittpunkt von $\mathfrak{lx}$, $\mathfrak{ny}$ und $\mathfrak{mz}$ sein. Wir finden auf diese Weise, daß

IIa. $\mathfrak{a} = (\mathfrak{lx}, \mathfrak{ny}, \mathfrak{mz})$ $\mathfrak{b} = (\mathfrak{nx}, \mathfrak{my}, \mathfrak{lz})$ $\mathfrak{c} = (\mathfrak{mx}, \mathfrak{ly}, \mathfrak{nz})$

Nach I 1 liegt $\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{al}$, folglich ist Strahl $\mathfrak{al}$ = Strahl $\mathfrak{lx}$
„ I 2 „ $\mathfrak{y}$ „ $\mathfrak{bm}$, „ „ „ $\mathfrak{bm}$ = „ $\mathfrak{my}$
„ I 3 „ $\mathfrak{z}$ „ $\mathfrak{cn}$, „ „ „ $\mathfrak{cn}$ = „ $\mathfrak{nz}$

Für I 4 kann demgemäß gesetzt werden:

IIb $\mathfrak{p} = (\mathfrak{lx}, \mathfrak{my}, \mathfrak{nz})$

Dies als 4. Beziehung zu IIa gesetzt zeigt, daß auch die Dreiecke $\mathfrak{lmn}$ und $\mathfrak{xyz}$ perspektiv liegen mit den Centren.

II. $\mathfrak{a} = (\mathfrak{lx}, \mathfrak{nx}, \mathfrak{mz})$ $\mathfrak{c} = (\mathfrak{mx}, \mathfrak{ly}, \mathfrak{nz})$
$\mathfrak{b} = (\mathfrak{nx}, \mathfrak{my}, \mathfrak{lz})$ $\mathfrak{p} = (\mathfrak{lx}, \mathfrak{my}, \mathfrak{nz})$

Auf ganz analoge Weise können wir aus den Beziehungen I auch ableiten, daß

III. $\mathfrak{l} = (\mathfrak{ax}, \mathfrak{cy}, \mathfrak{bz})$ $\mathfrak{n} = (\mathfrak{bx}, \mathfrak{ay}, \mathfrak{cz})$
$\mathfrak{m} = (\mathfrak{cx}, \mathfrak{by}, \mathfrak{az})$ $\mathfrak{p} = (\mathfrak{ax}, \mathfrak{by}, \mathfrak{cz})$

d. h. daß auch die Dreiecke $\mathfrak{abc}$ und $\mathfrak{xyz}$ vierfach perspectiv liegen mit den Centren $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$.

Wir finden demnach für einen in der erwähnten Abhandlung von Vályi vorkommenden Sätze die Fassung:

„Sind $\mathfrak{abc}$ und $\mathfrak{lmn}$ zwei vierfach perspective Dreiecke einer Ebene mit den Centren
$\mathfrak{x} = (\mathfrak{al}, \mathfrak{bn}, \mathfrak{cm})$, $\mathfrak{y} = (\mathfrak{an}, \mathfrak{bm}, \mathfrak{cl})$,
$\mathfrak{z} = (\mathfrak{am}, \mathfrak{bl}, \mathfrak{cn})$, $\mathfrak{p} = (\mathfrak{al}, \mathfrak{bm}, \mathfrak{cn})$;
so sind je zwei der Dreiecke $\mathfrak{abc}$, $\mathfrak{lmn}$, $\mathfrak{xyz}$ vierfach perspektiv, die Perspektivitätscentren werden durch das jedesmalige dritte Dreieck und den Punkt $\mathfrak{p}$ gebildet."

Hiernach ergiebt sich folgende Konstruktion von vierfach perspektiven Dreiecken. Es sei gegeben das Dreieck $\mathfrak{abc}$, gesucht ein zu ihm vierfach perspektives Dreieck $\mathfrak{lmn}$. Das eine der Perspektivitätscentren, etwa $\mathfrak{p}$, dürfen wir ganz willkürlich und einen der Eckpunkte des gesuchten Dreiecks, etwa $\mathfrak{l}$, beliebig auf $\mathfrak{ap}$ annehmen. Wir konstruiren dann der Reihe nach: $\mathfrak{y}$ als Schnittpunkt von $\mathfrak{bp}$ und $\mathfrak{cl}$, $\mathfrak{z}$ als Schnittpunkt von $\mathfrak{cp}$ und $\mathfrak{bl}$,

Digitized by Google

m als Schnittpunkt von $\mathfrak{a}\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{y}$, $\mathfrak{n}$ als Schnittpunkt von $\mathfrak{a}\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{c}\mathfrak{z}$ und schließlich $\mathfrak{x}$ als Schnittpunkt von $\mathfrak{c}\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{n}$. Sowohl Dreieck $\mathfrak{l}\mathfrak{m}\mathfrak{n}$ als Dreieck $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ ist dann zu dem gegebenen vierfach perspektiv.

Wollten wir zu dieser Betrachtung die duale anstellen, so würden neben den Dreiecksseiten

$$a = \mathfrak{b}\mathfrak{c},\ b = \mathfrak{c}\mathfrak{a},\ c = \mathfrak{a}\mathfrak{b};\ l = \mathfrak{m}\mathfrak{n},\ m = \mathfrak{n}\mathfrak{l},\ n = \mathfrak{l}\mathfrak{m}$$

die Axen der Perspektivität

$$x = (al, bn, cm) \qquad y = (an, bm, cl)$$
$$z = (am, bl, cn) \qquad p = (al, bm, cn)$$

auftreten. Je zwei der Dreiseite abc, lmn, xyz müssen vierfach perspektiv liegen, die Axen der Perspektivität werden durch das jedesmalige dritte Dreiseit und die Gerade p gebildet.

Von Interesse ist für uns indessen hierbei nur das Verhältnis, welches zwischen den so aufgetretenen Elementen p und $\mathfrak{p}$ besteht. Als Ergänzung des bereits erwähnten Satzes von Vályi können wir folgenden Satz beweisen:

> Die vierte Perspektivitätsaxe p = (al, bm, cn) der beiden vierfach perspektiven Dreiseite abc und lmn ist die Polare des vierten Perspektivitätscentrums der beiden vierfach perspektiven Dreiecke $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{l}\mathfrak{m}\mathfrak{n}$, in Bezug auf diese Dreiecke.

Der Beweis läßt sich mit Hilfe eines anderen Satzes von Vályi leicht erbringen. Dieser lautet:

> „Wenn die Dreiecke abc und 1 2 3 in $a_1\ b_2\ c_3$ - Kollineation sind, und der Pol der Kollineationsaxe bezüglich „auf das Dreieck abc auf der Geraden a_1 liegt, so sind „die Dreiecke auch in $a_1\ b_3\ c_2$ - Kollineation."

Wir benutzen diesen Satz in folgender Form:

> Sind $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{l}\mathfrak{m}\mathfrak{n}$ perspektive Dreiecke einer Ebene, Centrum $\mathfrak{o}$, Axe q, wobei $\mathfrak{o}$ die Polare p in Bezug auf das Dreieck $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ haben mag, und sind auch $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{l}\mathfrak{n}\mathfrak{m}$ perspektiv, so schneiden sich p und q auf $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$.

Zunächst mag ein kurzer synthetischer Beweis dieser Thatsache hier Platz finden. Aus Fig. 1 ist ersichtlich, daß die Axe p durch $\alpha = (\mathfrak{b}\mathfrak{c}, \mathfrak{m}\mathfrak{n})$, und die Polare q durch $\alpha' = (\mathfrak{b}'\mathfrak{c}', \mathfrak{b}\mathfrak{c})$ gehen muß. Ferner entnehmen wir der Figur, daß die beiden

Digitized by Google

Dreiecke mcb' und nbc' perspectiv liegen — die Schnittpunkte entsprechender Seite: c' = (mc, nb), o = (mb', nc'), a = (cb', bc') liegen auf einer Geraden —. Alsdann müssen aber die Verbindungslinien entsprechender Ecken, d. s. die Geraden mn, bc, b'c' durch einen Punkt gehen, d. h. die Punkte α und α' müssen zusammenfallen, es ist dies der Schnittpunkt von p und q auf bc.

Ebenso ſchneiden sich aber auch p und q vermöge der beiden Perspektivitäten $\begin{pmatrix} abc \\ lmn \end{pmatrix}$[1] und $\begin{pmatrix} abc \\ nml \end{pmatrix}$ auf ac, und vermöge der Perspectivitäten $\begin{pmatrix} abc \\ lmn \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} abc \\ mln \end{pmatrix}$ auf ab. Treten also bei den vierfach perspektiven Dreiecken abc und lmn diese drei Fälle zugleich auf, so müssen sich Axe und Polare dreimal ſchneiden, d. h. sie fallen zusammen. q. e. d.

---

§ 2. Vierfach perspektive Cyklen der trilinearen Kollineation.

abc und lmn seien nunmehr zwei cykliſch auf einander liegende Dreiecke einer gegebenen trilinearen Kollineation, im folgenden kurz „Cyklen“ genannt.

Es sollen sich decken die Dreieckspunkte a b c l m n
mit resp. b_1 c_1 a_1 m_1 n_1 l_1
(wo aa_1, bb_1, cc_1, ll_1, mm_1, nn_1 Paare entsprechender Punkte sind.)

Nach dem in der Einleitung angeführten Satze von Schröter liegen die gegebenen Cyklen abc und lmn jedenfalls dreifach perspektiv; die Perspektivitätscentren

$$\mathfrak{x} = (al, bn, cm,) \quad \mathfrak{y} = (an, bm, cl) \quad \mathfrak{z} = (am, bl, cn)$$

bilden ebenfalls einen Cyklus: $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y} = \mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z} = \mathfrak{x}_1$, und je zwei der Dreiecke abc, lmn, $\mathfrak{xyz}$ sind dreifach perspektive Cyklen mit den Punkten des jedesmaligen dritten Dreiecks als Perspektivitätscentren.

---

[1]) Bezeichnung im Anschluss an Vályi. s. Archiv 2. R. 3. Teil S. 441.

Digitized by Google

Sollen nun die Cyklen abc und lmn auch noch auf eine vierte Art perspektiv liegen, so haben wir die Bedeutung des in § 1 aufgetretenen vierten Centrums $p = (al, bm, cn)$ für den Fall zu untersuchen, daß abc und lmn Cyklen sind. Dem Punkte p entspricht der Punkt $p_1 = (a_1l_1, b_1m_1, c_1n_1)$.

Wegen der cyklischen Lage ist aber $(a_1l_1, b_1m_1, c_1n_1) = (cn, al, bm)$ d. h. $p_1 = p$. Punkt p und sein ihm entsprechender Punkt p_1 fallen also zusammen, und wir dürfen die Thatsache aussprechen:

> Das vierte Perspektivitätscentrum $p = (al, bm, cn)$ zweier vierfach perspektiven Cyklen abc und lmn ist ein Doppelpunkt der trilinearen Kollineation.

Dieser Satz giebt uns die Bedingung an, unter welcher vierfach perspektive Cyklen konstruierbar sind. Es muß einer der Doppelpunkte der gegebenen trilinearen Kollineation als viertes Perspektivitätscentrum gewählt werden, d. h. die Eckpunkte des einen Cyklus müssen auf den Verbindungslinien dieses Doppelpunktes mit den Punkten des anderen Cyklus liegen.

Es ist nun zu zeigen, daß wenn dies einmal eintritt, d. h. wenn ein Eckpunkt des einen Cyklus auf einer der betreffenden Verbindungslinien angenommen wird, die beiden anderen Punkte auch auf die beiden anderen Verbindungslinien fallen müssen.

p sei der gewählte Doppelpunkt und l liege auf ap. Dann fällt $l_1 = n$ auf $a_1p_1 = cp$. Liegt aber n auf cp, so muß $n_1 = m$ auf $c_1p_1 = bp$ fallen.

Wir können nunmehr betreffend die Konstruktion von vierfach perspektiven Cyklen folgenden Satz aufstellen.

> Es sei irgend ein Cyklus abc der trilinearen Kollineation gegeben. Man verbindet irgend einen der drei Doppelpunkte, etwa p, mit a, b und c, nimmt auf der Verbindungslinie ap einen beliebigen Punkt $l = m_1$ an und sucht den Punkt $m = n_1$, welcher auf bp, sowie den Punkt $n = l_1$, welcher auf cp liegt. Dann ist lmn ein zu abc vierfach perspektiver Cyklus, und zwar erhält man auf diese Weise eine einfache Serie von Cyklen lmn. Den drei Doppelpunkten entsprechend hat man demnach drei

Digitized by Google

Serien von Cyklen, welche mit dem gegebenen Cyklus vierfach perspektiv liegen und zwar eine reelle und zwei imaginäre.

Die praktische Ausführung dieser Konstruktion wird ganz analog der in § 1 für vierfach perspektive Dreiecke angegebenen sein. Nur darf diesmal Punkt 𝔭 nicht willkürlich angenommen werden, sondern muß in einen der drei Doppelpunkte der trilinearen Kollineation gelegt werden. Neben 𝔩𝔪𝔫 wird auch wieder 𝔵𝔶𝔷 ein sowohl zu 𝔞𝔟𝔠 als auch zu 𝔩𝔪𝔫 vierfach perspektiver Cyklus sein, und zwar gehört er derselben Serie an wie 𝔩𝔪𝔫, denn es liegen 𝔵 wie 𝔩 auf 𝔞𝔭, 𝔶 wie 𝔪 auf 𝔟𝔭 und 𝔷 wie 𝔫 auf 𝔠𝔭.

Es seien hier noch einige Bemerkungen gestattet.

1. Nach § 1 stehen bei zwei beliebigen vierfach perspektiven Dreiecken das vierte Centrum und die vierte Axe der Perspektivität im Verhältnis von Pol und Polare zu einander. Dies wird also auch bei den Cyklen 𝔞𝔟𝔠 und 𝔩𝔪𝔫 von § 2 der Fall sein. Da wir aber bei deren Konstruktion den einen Cyklus ganz beliebig wählen konnten, so wird also ganz abgesehen von der vierfachen Perspektivität die Doppellinie p Polare des Doppelpunktes p in Bezug auf jeden beliebigen Cyklus der trilinearen Kollineation sein. Wir kommen daher zu dem Satz:

Jede Seite des Doppelpunktdreiecks ist in Bezug auf einen jeden Cyklus der trilinearen Kollineation die Polare der gegenüberliegenden Ecke (Doppelpunkt).

2. Es wird indessen weiter unten wünschenswert, einen Beweis dieser Thatsache zu besitzen, welcher sich nicht auf Resultate des § 1 gründet. Wir beweisen daher den Satz nochmals direkt und zwar in der Form:

In jeder trilinearen Kollineation ist die Polare eines Doppelpunktes in Bezug auf irgend einen Cyklus Doppellinie dieser Kollineation.

Es sei (Fig. 2) 𝔞𝔟𝔠 ein beliebiger Cyklus, und 𝔭 Doppelpunkt. p ist dann die Polare von 𝔭 in Bezug auf 𝔞𝔟𝔠. Wir beweisen, daß p Doppellinie des trilinearen Kollineation ist.

Digitized by Google

Es ist $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{c}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}_1\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{b}\mathfrak{p}$, also $\mathfrak{c}_1' = \mathfrak{b}'$
ebenso $\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{c}\mathfrak{p}$, „ $\mathfrak{a}_1' = \mathfrak{c}'$
„ $\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}_1\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{p}$, „ $\mathfrak{b}_1' = \mathfrak{a}'$

Hiernach dürfen wir weiter schließen,

daß $\mathfrak{a}_1'\mathfrak{b}_1' = \mathfrak{c}'\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}_1'\mathfrak{c}_1' = \mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}_1'\mathfrak{a}_1' = \mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$,
da auch $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{c}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$,
so folgt, daß $\gamma_1 = \beta$, $\alpha_1 = \gamma$ $\beta_1 = \alpha$

Hieraus ergiebt sich, weil p $= \alpha\beta$, daß $\mathrm{p}_1 = \alpha_1\beta_1 = \gamma\alpha =$ p. q. e. d.

3. Durch vier Paare entsprechender Punkte: $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$, ist eine trilineare Kollineation vollständig festgelegt. Wird dazu noch $\mathfrak{l} = \mathfrak{m}_1$ auf $\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ angenommen, so ist dadurch auch der zu $\mathfrak{abc}$ vierfach perspektive Cyklus $\mathfrak{lmn}$ bestimmt. Dieselben Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{l}$ genügen aber ferner auch, wie wir sahen, zur Konstruktion der vierfach perspektiven Dreiecke (nicht Cyklen) $\mathfrak{abc}$ und $\mathfrak{lmn}$. Das letztere wird daher ein Cyklus der durch $\mathfrak{abc}$ und das Centrum $\mathfrak{p}$ festgelegten trilinearen Kollineation sein, oder mit andern Worten:

> Sind zwei beliebige vierfach perspektive Dreiecke einer Ebene gegeben, so giebt es stets eine trilineare Kollineation, in welcher jene Dreiecke Cyklen sind. Das vierte Perspektivitätscentrum ist Doppelpunkt, und die vierte Perspektivitätsaxe ist Doppellinie dieser Kollineation.

---

§ 3. Sechsfach perspektive Dreiecke.

In einer Ebene seien gegeben zwei Dreiecke

$\mathfrak{abc}$ und $\mathfrak{lmn}$

in sechsfach perspektiver Lage, mit den Perspektivitätscentren

I. 1. $\mathfrak{x} = (\mathfrak{al}, \mathfrak{bn}, \mathfrak{cm})$, 2. $\mathfrak{y} = (\mathfrak{an}, \mathfrak{bm}, \mathfrak{cl})$, 3. $\mathfrak{z} = (\mathfrak{am}, \mathfrak{bl}, \mathfrak{cn})$
4. $\mathfrak{p} = (\mathfrak{al}, \mathfrak{bm}, \mathfrak{cn})$, 5. $\mathfrak{q} = (\mathfrak{an}, \mathfrak{bl}, \mathfrak{cm})$, 6. $\mathfrak{r} = (\mathfrak{am}, \mathfrak{bn}, \mathfrak{cl})$

Die ersten vier dieser sechs Centren traten schon in § 1 als solche

Digitized by Google

auf; es werden deshalb zunächst auch in unserem jetzigen Falle die dort angegebenen Beziehungen II und III gelten. Beachten wir aber weiter, daß

nach I_1 $\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{cm}$ liegt, also Strahl $\mathfrak{cm} \equiv \mathfrak{mx} \equiv \mathfrak{cx}$
„ I_2 $\mathfrak{y}$ „ $\mathfrak{an}$ „ „ „ $\mathfrak{an} \equiv \mathfrak{ny} \equiv \mathfrak{ay}$
„ I_3 $\mathfrak{z}$ „ $\mathfrak{bl}$ „ „ „ $\mathfrak{bl} \equiv \mathfrak{lz} \equiv \mathfrak{bz}$

so geht I_5 auch über in

$$\mathfrak{q} = (\mathfrak{ny}, \mathfrak{lz}, \mathfrak{mx}) \text{ oder } \mathfrak{q} = (\mathfrak{ay}, \mathfrak{bz}, \mathfrak{cx})$$

Ebenso ist aus I leicht zu folgern, daß für I_6 auch gesetzt werden kann:

$$\mathfrak{r} = (\mathfrak{mz}, \mathfrak{ly}, \mathfrak{nx}) \text{ oper } \mathfrak{r} = (\mathfrak{az}, \mathfrak{cy}, \mathfrak{bx})$$

Durch Vereinigung erhalten wir:

II $\mathfrak{a} = (\mathfrak{lx}, \mathfrak{ny}, \mathfrak{mz})$, $\mathfrak{b} = (\mathfrak{nx}, \mathfrak{my}, \mathfrak{lz})$, $\mathfrak{c} = (\mathfrak{mx}, \mathfrak{ly}, \mathfrak{nz})$
$\mathfrak{p} = (\mathfrak{lx}, \mathfrak{my}, \mathfrak{nz})$, $\mathfrak{q} = (\mathfrak{mx}, \mathfrak{ny}, \mathfrak{lz})$, $\mathfrak{r} = (\mathfrak{nx}, \mathfrak{ly}, \mathfrak{mz})$

beziehungsweise:

III $\mathfrak{l} = (\mathfrak{ax}, \mathfrak{cy}, \mathfrak{bz})$, $\mathfrak{m} = (\mathfrak{cx}, \mathfrak{by}, \mathfrak{az})$, $\mathfrak{n} = (\mathfrak{bx}, \mathfrak{ay}, \mathfrak{cz})$
$\mathfrak{p} = (\mathfrak{ax}, \mathfrak{by}, \mathfrak{cz})$, $\mathfrak{q} = (\mathfrak{cx}, \mathfrak{ay}, \mathfrak{bz},)$ $\mathfrak{r} = (\mathfrak{bx}, \mathfrak{cy}, \mathfrak{az})$.

Hieraus können wir ersehen, daß das Dreieck $\mathfrak{xyz}$ sowohl mit Dreieck $\mathfrak{lmn}$, als auch mit Dreieck $\mathfrak{abc}$ sechsfach perspektiv liegt.

Mit Hilfe dieser Beziehungen II und III läßt sich in analoger Weise zeigen, daß:

IV. $\mathfrak{x} = (\mathfrak{ap}, \mathfrak{cq}, \mathfrak{br})$, $\mathfrak{y} = (\mathfrak{bp}, \mathfrak{aq}, \mathfrak{cr})$, $\mathfrak{z} = (\mathfrak{cp}, \mathfrak{bq}, \mathfrak{ar})$
$\mathfrak{l} = (\mathfrak{ap}, \mathfrak{bq}, \mathfrak{cr})$, $\mathfrak{m} = (\mathfrak{bp}, \mathfrak{cq}\ \mathfrak{ar})$, $\mathfrak{n} = (\mathfrak{cp}, \mathfrak{aq}, \mathfrak{br})$

und ferner, daß:

$\mathfrak{x} = (\mathfrak{lp}, \mathfrak{mq}, \mathfrak{nr})$, $\mathfrak{y} = (\mathfrak{mp}, \mathfrak{nq}, \mathfrak{lr})$, $\mathfrak{z} = (\mathfrak{np}, \mathfrak{lq}, \mathfrak{mr})$
$\mathfrak{a} = (\mathfrak{lp}, \mathfrak{np}, \mathfrak{mr})$, $\mathfrak{b} = (\mathfrak{mp}, \mathfrak{lq}, \mathfrak{nr})$, $\mathfrak{c} = (\mathfrak{np}, \mathfrak{mq}, \mathfrak{lr})$

Hieraus geht hervor, daß auch das Dreieck $\mathfrak{pqr}$ mit den beiden Dreiecken $\mathfrak{abc}$ und $\mathfrak{lmn}$ je sechsfach perspektiv liegt.

Endlich ließe sich auch der Nachweis führen, daß die beiden Dreiecke $\mathfrak{xyz}$ und $\mathfrak{pqr}$ sich in sechsfach perspektiver Lage befinden.

Fassen wir das Gefundene zusammen, so haben wir den Satz:

Sind $\mathfrak{abc}$ und $\mathfrak{lmn}$ zwei sechsfach perspektive Dreiecke einer Ebene mit den Centren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ (s. I), so sind je zwei der auf diese Weise gebildeten Dreiecke $\mathfrak{abc}$, $\mathfrak{lmn}$, $\mathfrak{xyz}$, $\mathfrak{pqr}$ sechsfach perspektiv, mit den Eckpunkten der beiden anderen Dreiecke als Centren.

(Vályi, a. a. O. S. 110.)

Digitized by Google

In § 1 sahen wir, daß bei vierfach perspektiven Dreiecken die vierte Perspektivitätsaxe p zugleich Polare des vierten Perspektivitätscentrums $\mathfrak{p}$ ist. Dies wird auch für die sechsfache Perspektivität giltig bleiben, wir können für dieselbe jenen Satz aber noch erweitern.

Ersetzen wir die Punkte $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ zuerst durch $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$ und dann durch $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{l}$, so wird für diese neuen Dreiecke $\mathfrak{nlm}$ und $\mathfrak{mnl}$ ganz dasselbe gelten, wie für Dreieck $\mathfrak{lmn}$. Führen wir diese Vertauschungen in den Beziehungen I (§ 1) aus, so erhalten wir:

$$\mathfrak{y} = (\mathfrak{an}, \mathfrak{bm}, \mathfrak{cl}) \qquad \mathfrak{x} = (\mathfrak{al}, \mathfrak{bn}, \mathfrak{cm})$$
$$\mathfrak{z} = (\mathfrak{am}, \mathfrak{bl}, \mathfrak{cn}) \qquad \mathfrak{q} = (\mathfrak{an}, \mathfrak{bl}, \mathfrak{cl})$$

beziehungsweise:

$$\mathfrak{z} = (\mathfrak{am}, \mathfrak{bl}, \mathfrak{cn}) \qquad \mathfrak{y} = (\mathfrak{an}, \mathfrak{bm}, \mathfrak{cl})$$
$$\mathfrak{x} = (\mathfrak{al}, \mathfrak{bn}, \mathfrak{cm}) \qquad \mathfrak{r} = (\mathfrak{am}, \mathfrak{bn}, \mathfrak{cl})$$

Hiernach ist analog dem früheren Satze, nach dem p = (al, bm, cn) Polare von $\mathfrak{p} = (\mathfrak{al}, \mathfrak{bm}, \mathfrak{cn})$ war, auch q = (an, bl, cm) Polare von $\mathfrak{q} = (\mathfrak{an}, \mathfrak{bl}, \mathfrak{cm})$ und r = (am, bn, cl) Polare von $\mathfrak{r} = (\mathfrak{am}, \mathfrak{bn}, \mathfrak{cl})$, sowohl in Bezug auf Dreieck $\mathfrak{abc}$ als auf $\mathfrak{lmn}$.

Ersetzen wir weiter $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, durch $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}$, bezw. $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{l}$, bezw. $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{n}$, so geht I (§ 1) über in:

$$\mathfrak{p} = (\mathfrak{al}, \mathfrak{bm}, \mathfrak{cn}) \qquad \mathfrak{q} = (\mathfrak{an}, \mathfrak{bl}, \mathfrak{cm})$$
$$\mathfrak{r} = (\mathfrak{am}, \mathfrak{bn}, \mathfrak{cl}) \qquad \mathfrak{x} = (\mathfrak{al}, \mathfrak{bn}, \mathfrak{cm})$$

bezw.

$$\mathfrak{q} = (\mathfrak{an}, \mathfrak{bl}, \mathfrak{cm}) \qquad \mathfrak{r} = (\mathfrak{am}, \mathfrak{bn}, \mathfrak{cl})$$
$$\mathfrak{p} = (\mathfrak{al}, \mathfrak{bm}, \mathfrak{cn}) \qquad \mathfrak{y} = (\mathfrak{an}, \mathfrak{bm}, \mathfrak{cl})$$

bezw.

$$\mathfrak{r} = (\mathfrak{am}, \mathfrak{bn}, \mathfrak{cl}) \qquad \mathfrak{p} = (\mathfrak{al}, \mathfrak{bm}, \mathfrak{cn})$$
$$\mathfrak{q} = (\mathfrak{an}, \mathfrak{bl}, \mathfrak{cm}) \qquad \mathfrak{z} = (\mathfrak{am}\ \mathfrak{bl}, \mathfrak{cn})$$

Hieraus geht aber weiter hervor, daß auch x = (al, bn, cm) Polare von $\mathfrak{x} = (\mathfrak{al}, \mathfrak{bn}, \mathfrak{cm})$, y = (an, bn, cl) Polare von $\mathfrak{y} = (\mathfrak{an}, \mathfrak{bm}, \mathfrak{cl})$ und z = (am, bl, cn) Polare von $\mathfrak{z} = (\mathfrak{am}, \mathfrak{bl}, \mathfrak{cn})$ ist, in Bezug auf Dreieck $\mathfrak{abc}$ und $\mathfrak{lmn}$.

Wir kommen so zunächst zu dem Satze:

> Die Perspektivitätsaxen x, y, z, p, q, r zweier sechsfach perspektiven Dreiecke $\mathfrak{abc}$ und $\mathfrak{lmn}$ sind die Polaren der entsprechenden Perspektivitätscentren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ sowohl in Bezug auf Dreieck $\mathfrak{abc}$ als in Bezug auf Dreieck $\mathfrak{lmn}$.

Digitized by Google

Dieser Satz läßt noch eine Erweiterung zu. Schröter hat (Annal. Bd. 2) gezeigt, daß wenn $\mathfrak{abc}$ und $\mathfrak{p}$ gegeben, das zu $\mathfrak{abc}$ sechsfach perspektive Dreieck, welches $\mathfrak{p}$ enthält, das ist Dreieck $\mathfrak{pqr}$, vollständig bestimmt ist. Aus dieser Thatsache läßt sich leicht die weitere ableiten, daß nämlich es nur zwei Dreiecke geben kann, welche $\mathfrak{p}$ zum Centrum haben und zu $\mathfrak{abc}$ sechsfach perspektiv liegen. Hiervon ausgehend, können wir einen Schluß ziehen auf die gegenseitige Lage der Perspektivitätsaxen und -centren unserer sechsfach perspektiven Dreiecke. $\mathfrak{p}$ und p stehen im Verhältnis von Pol und Polare, sowohl in Bezug auf die Dreiecke $\mathfrak{lmn}$ und $\mathfrak{xyz}$ als auch auf die Dreiseite lmn und xyz. Da jene sowohl wie diese aber die beiden einzig möglichen sind, so müssen sie gegenseitig übereinstimmen. Daß lmn $\equiv$ $\mathfrak{lmn}$, ist bereits bekannt, es zeigt sich aber jetzt auch, daß xyz $\equiv$ $\mathfrak{xyz}$. Nun kann x als Polare von $\mathfrak{x}$ nicht durch diesen Punkt gehen, ebenso nicht y durch $\mathfrak{y}$, oder z durch $\mathfrak{z}$. Es muß also x $=$ $\mathfrak{yz}$, y $=$ $\mathfrak{zx}$, z $=$ $\mathfrak{xy}$ sein.

Eine analoge Entwicklung würde auch ergeben, daß pqr $\equiv$ $\mathfrak{pqr}$ und zwar, daß p $=$ $\mathfrak{qr}$, q $=$ $\mathfrak{rp}$, r $=$ $\mathfrak{pq}$. Wir können dies in einem Satze dahin aussprechen:

> Die Perspektivitätscentren und -axen zweier sechsfach perspektiven Dreiecke haben eine solche gegenseitige Lage, daß die ersteren die Schnittpunkte von je zwei der letzteren, resp. die letzteren die Verbindungslinien von je zwei der ersteren sind.

Den Seite 14 ausgesprochenen Satz dürfen wir daher auch in der Form wiederholen:

> Jede Seite der vier sechsfach perspektiven Dreiecke $\mathfrak{abc}$, $\mathfrak{lmn}$, $\mathfrak{pqr}$ und $\mathfrak{xyz}$ ist die Polare der gegenüberliegenden Ecke in Bezug auf jedes der drei anderen Dreiecke.

Digitized by Google

§ 4. Sechsfach perspektive Cyklen der trilinearen Kollineation.

$\mathfrak{abc}$ und $\mathfrak{lmn}$ seien nun wieder Cyklen einer gegebenen trilinearen Kollineation, und zwar sechsfach perspektiv mit den Centren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ (§ 3 I). Die Eckpunkte dieser beiden Cyklen mögen sich gerade so paarweise decken und entsprechen, wie dies in § 2 der Fall war. Dort erkannten wir bei Betrachtung der vierfach perspektiven Cyklen in dem vierten Centrum $\mathfrak{p}$ einen Doppelpunkt der gegebenen Kollineation. Dasselbe gilt nun auch von dem fünften und sechsten Centrum unserer sechsfach perspektiven Cyklen.

Es ist $\mathfrak{q} = (\mathfrak{an}, \mathfrak{bl}, \mathfrak{cm})$ also $\mathfrak{q}_1 = (\mathfrak{a}_1\mathfrak{n}_1, \mathfrak{b}_1\mathfrak{l}_1, \mathfrak{c}_1\mathfrak{m}_1) = (\mathfrak{cm}, \mathfrak{an}, \mathfrak{bl}) = \mathfrak{q}$

ebenso $\mathfrak{r} = (\mathfrak{am}, \mathfrak{bn}, \mathfrak{cl})$ „ $\mathfrak{r}_1 = (\mathfrak{a}_1\mathfrak{m}_1, \mathfrak{b}_1\mathfrak{n}_1, \mathfrak{c}_1\mathfrak{l}_1) = (\mathfrak{cl}, \mathfrak{am}, \mathfrak{bn}) = \mathfrak{r}$

Wir dürfen also sagen:

> Die drei Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, welche mit als Centren der beiden sechsfach perspektiven Cyklen $\mathfrak{abc}$ und $\mathfrak{lmn}$ auftreten, sind die Doppelpunkte der durch diese Cyklen festgelegten trilinearen Kollineation.

Ist uns nun ein Cyklus $\mathfrak{abc}$ einer irgendwie bestimmten trilinearen Kollineation gegeben, so daß das Dreieck der Doppelpunkte $\mathfrak{pqr}$ als bekannt gilt, so ist der zu $\mathfrak{abc}$ sechsfach perspektive Cyklus $\mathfrak{lmn}$ durch die Beziehungen:

$$\mathfrak{l} = (\mathfrak{ap}, \mathfrak{lq}, \mathfrak{cr}),\ \mathfrak{m} = (\mathfrak{bp}, \mathfrak{cq}, \mathfrak{ar}),\ \mathfrak{n} = (\mathfrak{cp}, \mathfrak{aq}, \mathfrak{br})$$

bestimmt.

Die beiden so erhaltenen sechsfach perspektiven Cyklen $\mathfrak{abc}$ und $\mathfrak{lmn}$ haben aber außer den drei Doppelpunkten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ auch die Punkte

$$\mathfrak{x} = (\mathfrak{al}, \mathfrak{bn}, \mathfrak{cm}),\ \mathfrak{y} = (\mathfrak{an}, \mathfrak{bm}, \mathfrak{cl}),\ \mathfrak{z} = (\mathfrak{am}, \mathfrak{bl}, \mathfrak{cn})$$

zu Perspektivitätscentren, und zwar bilden diese letzteren ebenfalls einen sowohl zu $\mathfrak{abc}$ als auch zu $\mathfrak{lmn}$ sechsfach perspektiven Cyklus. (Muth, Ueber ternäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst. Dissertation, Giessen 1890.)

Indessen ist zur Festlegung des Cyklus $\mathfrak{xyz}$ die vorherige Konstruktion von $\mathfrak{lmn}$ nicht nötig, man kann $\mathfrak{xyz}$ auch direkt erhalten. Da nämlich nichts darüber bestimmt ist, welcher der drei vorhandenen Doppelpunkte der gegebenen trilinearen Kollineation

Digitized by Google

mit $\mathfrak{p}$, welcher mit $\mathfrak{q}$ oder $\mathfrak{r}$ bezeichnet werden soll, so darf man diese drei Buchstaben in beliebiger Permutation zur Anwendung bringen. Vertauschen wir in den oben gefundenen $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ bestimmenden Beziehungen $\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{r}$, so erhalten wir an deren Stelle: $(\mathfrak{a}\mathfrak{p}, \mathfrak{b}\mathfrak{r}, \mathfrak{c}\mathfrak{q})$ d. i. nach § 3 IV $= \mathfrak{p}$, $(\mathfrak{b}\mathfrak{p}, \mathfrak{c}\mathfrak{r}, \mathfrak{a}\mathfrak{q})$ d. ist nach § 3 IV $= \mathfrak{y}$

$(\mathfrak{c}\mathfrak{p}, \mathfrak{a}\mathfrak{r}, \mathfrak{b}\mathfrak{q})$ d. i. nach § 3 IV $= \mathfrak{z}$

Die übrigen vier möglichen Permutationen von $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ liefern keine neuen Cyklen. $\mathfrak{lmn}$ und $\mathfrak{xyz}$ sind die einzigen zu $\mathfrak{abc}$ möglichen sechsfach perspektiven Cyklen. Dieselben sind imaginär, da zwei der Doppelpunkte bekanntlich imaginär sein müssen.

Wir können daher betreffend die Konstruktion von sechsfach perspektiven Cyklen der trilinearen Kollineation folgenden Satz aufstellen:

> Zu einem gegebenen Cyklus einer trilinearen Kollineation sind zwei (imaginäre) sechsfach perspektive Cyklen $\mathfrak{lmn}$ und $\mathfrak{xyz}$ möglich. Verbindet man jeden der Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ mit jedem der Doppelpunkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ der trilinearen Kollineation, so sind $\mathfrak{lmn}$ und $\mathfrak{xyz}$ bestimmt durch die Beziehungen:
>
> $\mathfrak{l} = (\mathfrak{ap}, \mathfrak{bq}, \mathfrak{cr})$, $\mathfrak{m} = (\mathfrak{bp}, \mathfrak{cq}, \mathfrak{ar})$, $\mathfrak{n} = (\mathfrak{aq}, \mathfrak{br}, \mathfrak{cp})$
>
> $\mathfrak{x} = (\mathfrak{ap}, \mathfrak{br}, \mathfrak{cq})$, $\mathfrak{y} = (\mathfrak{aq}, \mathfrak{bp}, \mathfrak{cr})$, $\mathfrak{z} = (\mathfrak{ar}, \mathfrak{bq}, \mathfrak{cp})$
>
> Die beiden Cyklen $\mathfrak{lmn}$ und $\mathfrak{xyz}$ sind auch unter sich sechsfach perspektiv.

Auch hier wird es uns, wie bei Betrachtung der vierfachen Perspektivität, möglich sein, mit Hilfe der Kollineation eine Thatsache neu zu beweisen, welche wir für zwei beliebige sechsfach perspektive Dreiecke bereits in § 3 gefunden hatten.

1. Der in Anhang zu § 2 unter 1 resp. 2 gefundene Satz wurde dort für Doppellinie p und Doppelpunkt $\mathfrak{p}$ erwiesen. Ein gleiches wird natürlich auch von q und $\mathfrak{q}$ sowie von r und $\mathfrak{r}$ gelten.

2. Ebenso gilt die damals unter 3 erbrachte Thatsache auch für unseren jetzigen Fall der sechsfachen Perspektivität, d. h.

Digitized by Google

Sind zwei beliebige sechsfach perspektive Dreiecke abc und lmn gegeben, so giebt es stets eine trilineare Kollineation, in welcher jene Dreiecke Cyklen sind.

Da auch gezeigt ist, daß die drei Doppellinien und Doppelpunkte ein und dasselbe Dreieck bilden, so folgt aus diesen beiden vorstehenden Bemerkungen die Richtigkeit des in § 3, Seite 14 gefundenen Satzes.

Zweiter Abschnitt.

Perspektive Cyklen der tetraedralen Kollineation.

§ 5. Mehrfach perspektive Cyklen.

Es sei uns gegeben eine Kollineation im Raum, vermöge deren je vier Tetraederpunkte sich cyklisch entsprechen. abcd und lmno seien zwei solcher Tetraeder, wieder kurz „Cyklen" genannt, dieser — wie wir sie hier nennen wollen — tetraedralen Kollineation.

Es mögen sich decken die Punkte a b c d l m n o
mit resp. b_1 c_1 d_1 a_1 m_1 n_1 o_1 l_1
(wo aa_1, bb_1 u. s. w. Paare entsprechender Punkte sind.)

Fragen wir uns nun zunächst nach den möglichen Perspektivitäten. Dabei bestimmen wir, daß der dem Punkte a des ersten Cyklus gemäß der Perspektivität $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ l & m & n & o \end{pmatrix}$ entsprechende Punkt des zweiten Cyklus immer l sei.

Ohne diese Beſchränkung würden wir zwar den zu findenden Perspektivitäten noch andere hinzufügen können, die aber von jenen nur der Bezeichnung nach verſchieden wären.

Digitized by Google

Wir betrachten also die Perspektivität $\begin{pmatrix}\mathfrak{a}&\mathfrak{b}&\mathfrak{c}&\mathfrak{d}\\ \mathfrak{l}&\mathfrak{m}&\mathfrak{n}&\mathfrak{o}\end{pmatrix}$ und diejenigen fünf weiteren, welche aus ihr durch Permutation der Buchstaben $\mathfrak{m}\ \mathfrak{n}\ \mathfrak{o}$ hervorgehen. Wir haben zu untersuchen, welche von diesen sechs Permutationen für sich allein, und welche anderen mit jeder von ihnen gleichzeitig möglich sind. Aus der Fülle der durchzunehmenden Fälle greifen wir zunächst diejenigen heraus, welche uns zu möglichen Perspektivitäten führen.

Neben der Perspektivität $\begin{pmatrix}\mathfrak{a}&\mathfrak{b}&\mathfrak{c}&\mathfrak{d}\\ \mathfrak{l}&\mathfrak{m}&\mathfrak{n}&\mathfrak{o}\end{pmatrix}$ wären abgesehen von der cyklischen Lage der beiden Tetraeder nach einem, in der Einleitung bereits erwähnten, Satze von Vályi nur noch die drei Perspektivitäten:

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{a}&\mathfrak{b}&\mathfrak{c}&\mathfrak{d}\\ \mathfrak{m}&\mathfrak{l}&\mathfrak{o}&\mathfrak{n}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathfrak{a}&\mathfrak{b}&\mathfrak{c}&\mathfrak{d}\\ \mathfrak{n}&\mathfrak{o}&\mathfrak{l}&\mathfrak{m}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathfrak{a}&\mathfrak{b}&\mathfrak{c}&\mathfrak{d}\\ \mathfrak{o}&\mathfrak{n}&\mathfrak{m}&\mathfrak{l}\end{pmatrix}$$

entweder jede einzel, oder alle drei gleichzeitig, d. h. neben der gegebenen einfachen Perspektivität, drei zweifache und eine vierfache möglich. Welche von diesen Perspektivitäten bleiben nun auch noch möglich, wenn $\mathfrak{abcd}$ und $\mathfrak{lmno}$ Cyklen sind?

Ist $\begin{pmatrix}\mathfrak{a}&\mathfrak{b}&\mathfrak{c}&\mathfrak{d}\\ \mathfrak{l}&\mathfrak{m}&\mathfrak{n}&\mathfrak{o}\end{pmatrix}$ allein möglich?

Es sei $\mathfrak{p} = (\mathfrak{al}, \mathfrak{bm}, \mathfrak{cn}, \mathfrak{do})$ Centrum dieser Perspektivität. Dann ist $\mathfrak{p}_1 = (\mathfrak{a}_1\mathfrak{l}_1, \mathfrak{b}_1\mathfrak{m}_1, \mathfrak{c}_1\mathfrak{n}_1, \mathfrak{d}_1\mathfrak{o}_1) = (\mathfrak{do}, \mathfrak{al}, \mathfrak{bm}, \mathfrak{cn}) = \mathfrak{p}$.

Zwei Cyklen einer tetraedralen Kollineation können demnach in einfach perspektiver Lage liegen. Das Perspektivitätscentrum ist einer der vier Doppelpunkte der Kollineation.

Sind $\begin{pmatrix}\mathfrak{a}&\mathfrak{b}&\mathfrak{c}&\mathfrak{d}\\ \mathfrak{l}&\mathfrak{m}&\mathfrak{n}&\mathfrak{o}\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}\mathfrak{a}&\mathfrak{b}&\mathfrak{c}&\mathfrak{d}\\ \mathfrak{m}&\mathfrak{l}&\mathfrak{o}&\mathfrak{n}\end{pmatrix}$ zusammen möglich?

Die beiden Centren seien

$$\mathfrak{p} = (\mathfrak{al}, \mathfrak{bm}, \mathfrak{cn}, \mathfrak{do}),\ \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}$$
$$\mathfrak{u} = (\mathfrak{am}, \mathfrak{bl}, \mathfrak{co}, \mathfrak{dn})$$

Nun ist $\mathfrak{u}_1 = (\mathfrak{a}_1\mathfrak{m}_1, \mathfrak{b}_1\mathfrak{l}_1, \mathfrak{c}_1\mathfrak{o}_1, \mathfrak{d}_1\mathfrak{n}_1) = (\mathfrak{dl}, \mathfrak{ao}, \mathfrak{bn}, \mathfrak{cm}) = \mathfrak{v}$

ebenso $\mathfrak{v}_1 = (\mathfrak{d}_1\mathfrak{l}_1, \mathfrak{a}_1\mathfrak{o}_1, \mathfrak{b}_1\mathfrak{n}_1, \mathfrak{c}_1\mathfrak{m}_1) = (\mathfrak{co}, \mathfrak{dn}, \mathfrak{am}, \mathfrak{bl}) = \mathfrak{u}$.

Wir finden also, daß die $\mathfrak{u}$-Perspektivität die $\mathfrak{v}$-Perspektivität nach sich zieht, und letztere wieder die $\mathfrak{u}$-Perspektivität zur Folge hat. Da diese $\mathfrak{v}$-Perspektivität zu denjenigen gehört, welche mit der ersten der beiden zur Untersuchung stehenden zusammen bestehen können, so sind also die $\mathfrak{p}$-, $\mathfrak{u}$- und $\mathfrak{v}$-Perspektivität zu-

Digitized by Google

sammen gleichzeitig möglich. Eine nur dreifache Perspektivität kann aber allein nicht bestehen, sie zieht eine vierte mit Notwendigkeit nach sich. Dies kann und darf in unserem Falle nur die Perspektivität $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ n & o & l & m \end{pmatrix}$ sein. Daß diese auch wirklich mit den drei anderen zusammen bestehen kann und nicht etwa eine fünfte, neue nach sich zieht, ist leicht zu zeigen. Ihr Centrum sei $p'' = (an, bo, cl, dm)$ Dann ist

$p_1'' = (a_1n_1, b_1o_1, c_1l_1, d_1m_1) = (dm, an, bo, cl) = p''$.

Diese vierte Perspektivität hat also gleich der ersten einen Doppelpunkt als Centrum. Es ist demnach eine vierfache perspektive Lage zweier Cyklen der tetraedralen Kollineation möglich. Von den vier Centren derselben müssen zwei (p, p'') Doppelpunkte sein, während die beiden anderen (u, v) sich cyklifch entsprechen ($u_1 = v$, $v_1 = u$).

Aus dieser Betrachtung geht aber zugleich noch weiter hervor, daß auch die beiden zweifachen Perspektivitäten $\begin{pmatrix} abcd \\ lmno \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} abcd \\ nolm \end{pmatrix}$ sowie $\begin{pmatrix} abcd \\ mlon \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} abcd \\ onml \end{pmatrix}$ für sich allein denkbar sind. Die Centren der ersteren (p, p'') sind Doppelpunkte, die der letzteren (u, v) sind sich wechselseitig entsprechende Punkte der Kollineation.

Weitere, von den gefundenen im Wesen verfchiedene, Perspektivitäten lassen sich nicht auffinden, denn andere, welche nach dem Vályi'fche Satze etwa noch möglich wären, erweisen sich bei Cyklen als unmöglich. Ein Beispiel möge genügen.

Neben der Perspektivität $\begin{pmatrix} abcd \\ lmon \end{pmatrix}$ könnten höchstens nach Vályi bestehen die Perspektivitäten $\begin{pmatrix} abcd \\ mlon \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} abcd \\ nolm \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} abcd \\ onml \end{pmatrix}$ Es sei $i = (al, bm, co, dn)$ also $i_1 = (a_1l_1, b_1m_1, c_1o_1, d_1n_1,) = (do, al, bn, cm)$. Aus der i-Perspektivität folgt also die neue: $\begin{pmatrix} abcd \\ lnmo \end{pmatrix}$, welche aber nicht zu den drei gehört, die mit ihr zugleich bestehen können. Die i-Perspektivität ist also weder für sich allein, noch mit anderen zusammen möglich.

Zusammenfassend dürfen wir sagen:

Zwifchen zwei Cyklen $abcd$ und $lmno$ der tetrae-

Digitized by Google

dralen Kollineation sind keine anderen als folgende Typen von Perspektivitäten möglich.

1. Eine einfache Perspektivität $\begin{pmatrix} \mathfrak{abcd} \\ \mathfrak{lmno} \end{pmatrix}$, deren Centrum $\mathfrak{p} = (\mathfrak{al}, \mathfrak{bm}, \mathfrak{cn}, \mathfrak{do})$ Doppelpunkt der Kollineation ist.

2.*) Die zweifache Perspektivität $\begin{pmatrix} \mathfrak{abcd} \\ \mathfrak{lmno} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathfrak{abcd} \\ \mathfrak{nolm} \end{pmatrix}$, deren Centren $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'' = (\mathfrak{an}, \mathfrak{bo}, \mathfrak{cl}, \mathfrak{dm})$ Doppelpunkte der Kollineation sind.

3. Die zweifache Perspektivität $\begin{pmatrix} \mathfrak{abcd} \\ \mathfrak{mlon} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathfrak{abcd} \\ \mathfrak{onml} \end{pmatrix}$, deren Centren $\mathfrak{u} = (\mathfrak{am}, \mathfrak{bl}, \mathfrak{co}, \mathfrak{dn})$, $\mathfrak{v} = (\mathfrak{ao}, \mathfrak{bn}, \mathfrak{cm}, \mathfrak{dl})$ sich wechselseitig entsprechende Punkte der Kollineation sind. ($\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{v}$, $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{u}$).

4. Die vierfache Perspektivität

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{abcd} \\ \mathfrak{lmno} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{abcd} \\ \mathfrak{nolm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{abcd} \\ \mathfrak{mlon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{abcd} \\ \mathfrak{onml} \end{pmatrix}$$

mit den Centren $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}''$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, welche schon bei den beiden zweifachen Perspektivitäten auftraten.

---

§ 6. Die durch zweimalige Anwendung der Kollineation entstehende Involution.

Bei der im vorigen § unter 2 gefundenen zweifachen $\mathfrak{pp}''$-Perspektivität werden die Punkte des gesuchten Cyklus $\mathfrak{lmno}$ gefunden durch die Beziehungen:

$\mathfrak{l} = (\mathfrak{ap}, \mathfrak{cp}'')$, $\mathfrak{m} = (\mathfrak{bp}, \mathfrak{dp}'')$, $\mathfrak{n} = (\mathfrak{cp}, \mathfrak{ap}'')$, $\mathfrak{o} = (\mathfrak{dp}, \mathfrak{bp}'')$

Hieraus folgt, daß die beiden Doppelpunkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}''$ sowohl mit

---

*) Es wird später der Beweis erbracht, dass die unter 2 genannte zweifache Perspektivität für sich allein nicht bestehen kann, sondern stets die unter 3 genannte nach sich zieht, sich also immer zu der unter 4 genannten vierfachen Perspektivität erweitert.

Digitized by Google

den Punkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$, als auch mit den Punkten $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{d}$ in je einer Ebene liegen müssen. Wird diese Forderung nun immer erfüllbar sein, und welcher Bedingung ist die Lage der Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ unterworfen, um ihr zu genügen?

Zur Beantwortung dieser Frage, und damit zur Vorbereitung der Konstruktion zweifach perspektiver Cyklen, stellen wir folgende Betrachtung an. Aus unserer Kollineation erhalten wir eine Involution dadurch, daß wir jedem der Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ den zweitnächsten entsprechen lassen, d. h. wir wenden die Kollineation noch ein zweites Mal auf dieselben Punkte an. Alsdann werden dieselben sich paarweise so zugeordnet sein, daß $\mathfrak{a}$ dem Punkte $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}$ wieder $\mathfrak{a}$, ebenso $\mathfrak{b}$ dem Punkte $\mathfrak{d}$, und dieser wieder $\mathfrak{b}$ entspricht.

Schröter hat die so entstandene Involution bereits einer Betrachtung unterzogen und erwiesen, daß dieselbe eine gefchart-involutorifche ist. (Annal. XX. S. 251.) Als Doppelpunkte dieser Involution erkennen wir zunächst die Doppelpunkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ und $\mathfrak{p}'''$ der ursprünglichen Kollineation. Außerdem werden aber auch die Punkte $\mathfrak{u} = \mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v} = \mathfrak{u}_1$ Doppelpunkte der Involution sein, denn dieselben entsprechen sich bei nochmaliger kollinearen Zuordnung selbst. Solche sich wechselseitig entsprechende Punkte der Kollineation werden als Doppelpunkte der Involution auf einer der beiden Axen liegen. Dieses sind die Verbindungslinien der beiden reellen ($\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}''$) und der beiden imaginären Doppelpunkte ($\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}'''$) der Kollineation. Jedem Punkte $\mathfrak{u}$ der Axe $\mathfrak{p}\mathfrak{p}''$ entspricht in der Kollineation ein Punkt $\mathfrak{v} = \mathfrak{u}_1$, welcher auf $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_1''$ d. i. $\mathfrak{p}\mathfrak{p}''$, also auf derselben Axe liegt. Die auf dieser Axe gelegenen Punkte bilden aber eine Involution auf der Geraden, mit den Doppelpunkten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}''$, und werden bekanntlich von diesen harmonifch getrennt. Wir dürfen also behaupten:

> Je zwei sich wechselseitig entsprechende Punkte der tetraedralen Kollineation: $\mathfrak{u} = \mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v} = \mathfrak{u}_1$ liegen auf einer der beiden Axen der durch nochmalige Anwendung der Kollineation entstandenen Involution. Sie werden durch die auf dieser Axe liegenden Doppelpunkte der Kollineation harmonifch getrennt.

Es entsteht aber nun weiter die Frage, ob $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}''$ die

beiden einzigen Doppelpunkte sind, welche zusammen als Centren der zweifach perspektiven Cyklen $\mathfrak{abcd}$ und $\mathfrak{lmno}$ auftreten können. Zunächst ist klar, daß neben $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}''$ auch die beiden anderen Doppelpunkte $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}'''$ zusammen Centren sein können, denn wie wir schon andeuteten ist neben $\mathfrak{p}\mathfrak{p}''$ auch $\mathfrak{p}'\mathfrak{p}'''$ Involutionsaxe, und was von der ersteren galt, muß auch entsprechend für die letztere giltig bleiben. Wie steht es aber mit den zweifachen Perspektivitäten, deren Centren $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'''$, $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}''$, $\mathfrak{p}''$ und $\mathfrak{p}'''$ sind, werden diese auch möglich sein? Wir beantworten diese Frage für den ersten der angegebenen Fälle.

Es seien $\mathfrak{p} = (\mathfrak{al}, \mathfrak{bm}, \mathfrak{cn}, \mathfrak{do})$ und $\mathfrak{p}' = (\mathfrak{am}, \mathfrak{bn}, \mathfrak{co}, \mathfrak{dl})$ Centren einer zweifachen Perspektivität. Hierbei schneidet $\mathfrak{ac}$ einmal die Involutionsaxen $\mathfrak{p}\mathfrak{p}''$ und $\mathfrak{p}'\mathfrak{p}'''$, dann aber, weil $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ in einer Ebene liegen sollen, auch die Gerade $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$. Da drei Kanten des Doppelpunkttetraeders nicht in einer Ebene liegen, so muß $\mathfrak{ac}$ in der Ebene der Geraden $\mathfrak{p}\mathfrak{p}''$ und $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$, d. i. die Ebene $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'\mathfrak{p}''$ liegen, ebenso auch in der Ebene $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'\mathfrak{p}'''$. Diese beiden Ebenen fallen aber nicht zusammen, es muß $\mathfrak{ac}$ also auf deren Schnittlinie $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ liegen, und das gleiche muß auch für $\mathfrak{bd}$ gelten. Die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ lägen dann aber auf einer Geraden und bildeten kein eigentliches Tetraeder. Eine zweifache Perspektivität mit den Centren $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ oder $\mathfrak{p}''$, $\mathfrak{p}'''$ ist also nicht möglich, dasselbe wäre ganz analog auch für $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ und $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'''$ zu beweisen. Wir finden also die Thatsache erwiesen:

> Die Centren der in § 5 unter 2 gefundenen zweifachen Perspektivität müssen die Doppelpunkte derselben Involutionsaxe sein.

Was aber von den Centren dieser ersten Art zweifacher Perspektivität gilt, wird auch von den Centren $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ der anderen Art gelten, auch sie werden auf derselben Involutionsaxe liegen. Treten die vier Centren zusammen auf, so ist leicht einzusehen, daß der Satz gelten wird:

> Bei der vierfachen ($\mathfrak{p}\mathfrak{p}''\mathfrak{u}\mathfrak{v}$-)Perspektivität müssen die Centren $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}''$ auf der einen, die Centren $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ auf der anderen Involutionsaxe liegen.

Digitized by Google

§ 7. Konstruktion von ein- und zweifach perspektiven Cyklen.

a. Konstruktion einfach perspektiver Cyklen.

Ist der Cyklus $\mathfrak{abcd}$ gegeben, und der zu ihm einfach perspektive Cyklus $\mathfrak{lmno}$ gesucht, so wissen wir aus § 5, daß das Centrum ein Doppelpunkt der tetraedralen Kollineation sein muß, etwa $\mathfrak{p} = (\mathfrak{al}, \mathfrak{bm}, \mathfrak{cn}, \mathfrak{do})$. Wir haben also die Punkte des gesuchten Cyklus so zu wählen, daß ihre resp. Verbindungslinien mit den gegebenen Cykluspunkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ durch den Doppelpunkt $\mathfrak{p}$ gehen. Hierzu ist indessen nur nötig, daß einmal je zwei entsprechende Punktpaare auf einer durch $\mathfrak{p}$ gehenden Geraden liegen. Denn fällt z. B. $\mathfrak{l}$ auf $\mathfrak{ap}$, so wird $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{o}$ auf $\mathfrak{a}_1\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{dp}$, folglich $\mathfrak{o}_1 = \mathfrak{n}$ auf $\mathfrak{d}_1\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{cp}$ und $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{m}$ auf $\mathfrak{c}_1\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{bp}$ fallen.

Wir können daher betreffend die Konstruktion von einfach perspektiven Cyklen der tetraedralen Kollineation folgenden Satz aufstellen:

> Es sei irgend ein Cyklus $\mathfrak{abcd}$ gegeben. Man verbindet irgend einen der vier Doppelpunkte der Kollineation, etwa $\mathfrak{p}$, mit den vier Cykluspunkten. Nimmt auf der Verbindungslinie $\mathfrak{ap}$ einen beliebigen Punkt $\mathfrak{l} = \mathfrak{m}_1$ an und sucht die Punkte $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n} = \mathfrak{o}_1$, $\mathfrak{o} = \mathfrak{l}_1$, welche auf die übrigen Verbindungslinien zu liegen kommen. Dann ist $\mathfrak{lmno}$ ein zu $\mathfrak{abcd}$ einfach perspektiver Cyklus, und zwar erhält man auf diese Weise eine einfache Serie von Cyklen $\mathfrak{lmno}$. Den vier Doppelpunkten entsprechend giebt es im Ganzen vier Serien von Cyklen — zwei reelle und zwei imaginäre —, welche zu $\mathfrak{abcd}$ einfach perspektiv liegen.

b. Konstruktion zweifach perspektiver Cyklen.

Nach den Resultaten des § 5 wären zwei Arten zweifach perspektiver Cyklen denkbar. Wie dort aber schon angedeutet

Digitized by Google

wurde, kann die unter 2 aufgetretene $\mathfrak{p}\mathfrak{p}''$-Perspektivität nicht für sich allein bestehen, sondern zieht die unter 3 gefundene $\mathfrak{u}\mathfrak{v}$-Perspektivität nach sich, erweitert sich also zu einer vierfachen Perspektivität. Der Beweis für diese Behauptung gestaltet sich folgendermaßen.

Wir nehmen an, die Cyklen $\mathfrak{abcd}$ und $\mathfrak{lmno}$ stünden in der $\mathfrak{p}\mathfrak{p}''$-Perspektivität. $\mathfrak{p} = (\mathfrak{al}, \mathfrak{dm}, \mathfrak{cn}, \mathfrak{do})$, $\mathfrak{p}'' = (\mathfrak{an}, \mathfrak{bo}, \mathfrak{cl}, \mathfrak{dm})$
$\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}$ $\mathfrak{p}_1'' = \mathfrak{p}''$

Nach dem früheren ist ersichtlich, daß in diesem Falle $\mathfrak{ac}$ und $\mathfrak{ln}$ die Axe $\mathfrak{p}\mathfrak{p}''$ schneiden. Es sei (Fig. 3) $(\mathfrak{ac}, \mathfrak{p}\mathfrak{p}'') = \mathfrak{x}$, $(\mathfrak{ln}, \mathfrak{p}\mathfrak{p}'') = \mathfrak{y}$.

Nach dem Satze vom vollständigen Viereck liegen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ zu $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}''$ harmonisch, sind also einander entsprechende Punkte der Kollineation: $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{x}$. Da $\mathfrak{ac}$ durch $\mathfrak{x}$ geht, so geht $\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{bd}$ durch $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{y}$; ebenso, da $\mathfrak{ln}$ durch $\mathfrak{y}$ geht, geht auch $\mathfrak{l}_1\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{mo}$ durch $\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{x}$. $\mathfrak{ac}$ und $\mathfrak{mo}$ schneiden sich also in $\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{p}\mathfrak{p}''$. Die vier Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{o}$ liegen demnach in einer Ebene (Fig. 4). Es schneiden sich also auch die Geraden $\mathfrak{am}$ und $\mathfrak{co}$. Dieser Schnittpunkt $\mathfrak{u} = (\mathfrak{am}, \mathfrak{co})$ wird auf der Involutionsaxe $\mathfrak{p}'\mathfrak{p}'''$ liegen, denn $\mathfrak{am}$ und $\mathfrak{co}$ sind entsprechende Strahlen der § 6 betrachteten Involution: $\mathfrak{a}_1\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{dl}$, $\mathfrak{d}_1\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{co}$; $\mathfrak{c}_1\mathfrak{o}_1 = \mathfrak{bn}$, $\mathfrak{b}_1\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{am}$. Der $\mathfrak{u}$ entsprechende Punkt sei $\mathfrak{v} = \mathfrak{u}_1 = (\mathfrak{a}_1\mathfrak{m}_1, \mathfrak{c}_1\mathfrak{o}_1) = (\mathfrak{dl}, \mathfrak{bn})$. Ebenso finden wir, da die Geraden $\mathfrak{bd}$ und $\mathfrak{ln}$ durch $\mathfrak{y}$ gehen, daß $\mathfrak{u}' = (\mathfrak{bl}, \mathfrak{dn})$ und $\mathfrak{u}_1' = \mathfrak{v}' = (\mathfrak{b}_1\mathfrak{l}_1, \mathfrak{d}_1\mathfrak{n}_1) = (\mathfrak{ac}, \mathfrak{cm})$ ebenfalls entsprechende Punkte der Axe $\mathfrak{p}'\mathfrak{p}'''$ sein werden.

Wir können nun zeigen, daß

$\mathfrak{u}' = (\mathfrak{bl}, \mathfrak{dn}) = \mathfrak{u} = (\mathfrak{am}, \mathfrak{co})$ und ferner, daß
$\mathfrak{v}' = (\mathfrak{cm}, \mathfrak{ao}) = \mathfrak{v} = (\mathfrak{bn}, \mathfrak{dl})$

Die Geraden $\mathfrak{ac}$, $\mathfrak{bd}$, $\mathfrak{ln}$ und $\mathfrak{mo}$ schneiden als Doppelstrahlen der Involution die beiden Axen $\mathfrak{p}\mathfrak{p}''$ und $\mathfrak{p}'\mathfrak{p}'''$. Da $\mathfrak{ac}$ und $\mathfrak{ln}$ wegen der $\mathfrak{p}\mathfrak{p}''$-Perspektivität in einer durch die Axe $\mathfrak{p}\mathfrak{p}''$ gehenden Ebene liegen, und da die zweite Axe $\mathfrak{p}'\mathfrak{p}'''$ nicht auch in dieser Ebene liegen kann, so schneiden sich jene Ebene und diese Axe in dem Schnittpunkte $\mathfrak{f}$ von $\mathfrak{ac}$ und $\mathfrak{ln}$. Durch den $\mathfrak{f}$ entsprechenden Punkt $\mathfrak{g}$ der Axe $\mathfrak{p}'\mathfrak{p}'''$ werden die Geraden $\mathfrak{bd}$ und $\mathfrak{mo}$ hindurchgehen. Sowohl $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$, als auch $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ liegen als entsprechende Punkte zu $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}'''$, folglich auch zu einander har-

Digitized by Google

monisch, d. h. $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ liegen sowohl zu $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}'''$ als auch zu $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ harmonisch.

Ein gleiches gilt aber auch für das Punktpaar $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$. Da es aber nur ein Punktpaar giebt, welches zu zwei anderen harmonisch liegen kann, so muß Paar $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ und Paar $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$ identisch sein. Es muß, da $\mathfrak{u}$ nicht gleich $\mathfrak{v}'$ sein kann, $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}'$ sein. Die beiden Cyklen liegen also derart, daß neben der angenommenen $\mathfrak{p}\mathfrak{p}''$-Perspektivität auch noch die Centren

$$\mathfrak{u} = (\mathfrak{am}, \mathfrak{bl}, \mathfrak{co}, \mathfrak{dn}), \quad \mathfrak{v} = (\mathfrak{ao}, \mathfrak{bn}, \mathfrak{cm}, \mathfrak{dl})$$

auftreten.

Wir finden demnach das Resultat:

Die in § 5 unter 2 angegebene $\mathfrak{p}\mathfrak{p}''$-Perspektivität kann nicht für sich allein bestehen, sondern hat stets noch die unter 3 gefundene $\mathfrak{u}\mathfrak{v}$-Perspektivität zur Folge.

Naheliegend ist nun die Vermutung, daß auch die $\mathfrak{u}\mathfrak{v}$-Perspektivität nicht für sich allein bestehen könne, sondern umgekehrt die $\mathfrak{p}\mathfrak{p}''$-Perspektivität nach sich ziehen werde. Dies ist jedoch nicht der Fall.

Die in § 5 gefundene zweite Art zweifacher Perspektivität, bei welcher zwei sich wechselseitig entsprechende Punkte der Kollineation als Centren auftreten, ist für sich allein möglich. Sie ist demnach die einzige zweifache Perspektivität, welche zwischen zwei Cyklen der tetraedralen Kollineation bestehen kann.

Diese Thatsache gilt jedoch auch nur unter einer Bedingung. Die $\mathfrak{u}\mathfrak{v}$-Perspektivität zieht die $\mathfrak{p}\mathfrak{p}''$-Perspektivität doch nach sich, wenn die Centren $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ eine solche Lage haben, wie in der vorhergehenden Untersuchung, nämlich wenn diese beiden Punkte sowohl zu den beiden Doppelpunkten $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$, als auch zu den dort aufgetretenen Punkten $\mathfrak{f} = (\mathfrak{ac}, \mathfrak{p}'\mathfrak{p}''')$, $\mathfrak{g} = (\mathfrak{bd}, \mathfrak{p}'\mathfrak{p}''')$ harmonisch liegen. Der Beweis für diese Behauptung ergiebt sich auf folgende Weise.

Gegeben seien die beiden Cyklen $\mathfrak{abcd}$ und $\mathfrak{lmno}$ in der zweifachen $\mathfrak{u}\mathfrak{v}$-Perspektivität, deren Centren also sind: $\mathfrak{u} = (\mathfrak{am}, \mathfrak{bl}, \mathfrak{co}, \mathfrak{dn})$, $\mathfrak{v} = (\mathfrak{ao}, \mathfrak{bn}, \mathfrak{cm}, \mathfrak{dl})$. Außerdem setzen wir voraus, daß diese

Digitized by Google

beiden Punkte zu dem oben bezeichneten Punktpaare $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ harmonifch liegen.

Wegen der $\mathfrak{u}\mathfrak{v}$ - Perspektivität ist es nötig, daß die beiden Centren $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ sowohl mit den Punkten $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}$ als auch mit den Punkten $\mathfrak{b}, \mathfrak{d}$ in je einer Ebene liegen. Da $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ auf der Axe $\mathfrak{p}'\mathfrak{p}'''$ liegen, so ist die erstere dieser beiden Ebenen festgelegt durch jene Axe und die Gerade $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$, welche erstere im Punkte $\mathfrak{f}$ trifft. (Fig. 4). In diese Ebene müssen außerdem noch fallen die Punkte $\mathfrak{m} = (\mathfrak{a}\mathfrak{u}, \mathfrak{c}\mathfrak{v})$, $\mathfrak{o} = (\mathfrak{c}\mathfrak{u}, \mathfrak{a}\mathfrak{v})$. Bezeichnen wir den Schnittpunkt $(\mathfrak{m}\mathfrak{o}, \mathfrak{p}'\mathfrak{p}''')$ mit $\mathfrak{g}'$, so muß nach dem Satze vom vollständigen Viereck $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}'$ zu $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ harmonifch liegen. Dasselbe gilt aber, unserer Voraussetzung gemäß, auch von den Punktpaaren $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ und $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}$, woraus folgt, daß $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$. Es geht also $\mathfrak{m}\mathfrak{o}$ durch $\mathfrak{g}$, also $\mathfrak{m}_1\mathfrak{o}_1 = \mathfrak{l}\mathfrak{n}$ durch $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}$, sodaß wir haben: $\mathfrak{f} = (\mathfrak{a}\mathfrak{c}, \mathfrak{l}\mathfrak{n})$, $\mathfrak{g} = (\mathfrak{b}\mathfrak{d}, \mathfrak{m}\mathfrak{o})$.

Es liegen demnach die Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{l}, \mathfrak{n}$ in einer Ebene, (Fig. 3) und die Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{l}$, $\mathfrak{c}\mathfrak{n}$, sowie $\mathfrak{a}\mathfrak{n}$, $\mathfrak{c}\mathfrak{l}$ müssen sich fchneiden: $\mathfrak{q} = (\mathfrak{a}\mathfrak{l}, \mathfrak{c}\mathfrak{n})$, $\mathfrak{r} = (\mathfrak{a}\mathfrak{n}, \mathfrak{c}\mathfrak{l})$. Diese beiden Punkte sind Doppelpunkte unserer Iuvolution, wie leicht zu zeigen ist:

$$\mathfrak{q}_1 = (\mathfrak{a}_1\mathfrak{l}_1, \mathfrak{c}_1\mathfrak{n}_1) = (\mathfrak{d}\mathfrak{o}, \mathfrak{b}\mathfrak{m}), (\mathfrak{d}_1\mathfrak{o}_1, \mathfrak{b}_1\mathfrak{m}_1) = (\mathfrak{c}\mathfrak{n}, \mathfrak{a}\mathfrak{l}) = \mathfrak{q}$$
$$\mathfrak{r}_1 = (\mathfrak{a}_1\mathfrak{n}_1, \mathfrak{c}_1\mathfrak{l}_1) = (\mathfrak{d}\mathfrak{m}, \mathfrak{b}\mathfrak{o}); (\mathfrak{d}_1\mathfrak{m}_1, \mathfrak{b}_1\mathfrak{o}_1) = (\mathfrak{c}\mathfrak{l}, \mathfrak{a}\mathfrak{n}) = \mathfrak{r}$$

$\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{r}$ werden daher auf der Involutionsaxe $\mathfrak{p}\mathfrak{p}''$ liegen, welche demnach ebenfalls in unsere Ebene fällt.

Die Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{m}\mathfrak{o}$ liegen (Fig. 4) in einer Ebene mit der Involutionsaxe $\mathfrak{p}'\mathfrak{p}'''$. Beide Geraden müssen aber als Doppelstrahlen der Involution auch die Axe $\mathfrak{p}\mathfrak{p}''$ fchneiden, und dies muß, da die beiden Axen nicht in einer Ebene liegen, in demselben Punkte, etwa $\mathfrak{x}$, (Fig. 3) geschehen. Aus ganz analogen Gründen müssen sich auch $\mathfrak{b}\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{l}\mathfrak{n}$ in einem Punkte, etwa $\mathfrak{y}$, von $\mathfrak{p}\mathfrak{p}''$ treffen. Wir haben also $\mathfrak{x} = (\mathfrak{a}\mathfrak{c}, \mathfrak{m}\mathfrak{o})$, $\mathfrak{y} = (\mathfrak{b}\mathfrak{d}, \mathfrak{l}\mathfrak{n})$; $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{x}$.

Wegen $\mathfrak{u} = (\mathfrak{a}\mathfrak{m}, \mathfrak{d}\mathfrak{n})$ werden sich auch $\mathfrak{a}\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{d}\mathfrak{m}$ fchneiden müssen. Dieser Schnittpunkt sei $\mathfrak{z} = (\mathfrak{a}\mathfrak{n}, \mathfrak{d}\mathfrak{m})$, folgt $\mathfrak{z}_1 = (\mathfrak{a}_1\mathfrak{n}_1, \mathfrak{d}_1\mathfrak{m}_1) = (\mathfrak{d}\mathfrak{m}, \mathfrak{c}\mathfrak{l})$.

Hier sind nun zwei Fälle möglich. Entweder liegt die Gerade $\mathfrak{d}\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{a}\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{c}\mathfrak{l}$ in einer Ebene, d. i. die Ebene von Fig. 3; da aber $\mathfrak{b}\mathfrak{d}$ durch $\mathfrak{y}$ geht, müßte auch $\mathfrak{b}$ in diese Ebene fallen. In ihr lägen also die vier Cykluspunkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ und bildeten dem-

Digitized by Google

nach kein eigentliches Tedraeder. So bleibt nur als zweite Möglichkeit übrig, daß $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}_1$, zusammenfallen und zwar kann das nur im Punkte $\mathfrak{r} = (\mathfrak{an}, \mathfrak{cl})$ geſchehen. Es ſchneiden sich demnach in $\mathfrak{r}$ die Geraden $\mathfrak{an}$, $\mathfrak{bm}$, $\mathfrak{cl}$. $\mathfrak{r}$ ist aber Doppelpunkt, geht also $\mathfrak{cl}$ durch ihn hindurch, so muß auch $\mathfrak{c}_1\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{bc}$ das gleiche thun.

Es ist also $\mathfrak{r} = (\mathfrak{an}, \mathfrak{bc}, \mathfrak{cl}, \mathfrak{bm})$ d. i. Doppelpunkt $\mathfrak{p}''$.

Auf gleiche Weise hätten wir auch beweisen können, daß $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ ist.

Unter den gemachten Voraussetzungen wären also außer $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ auch $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}''$ Perspektivitätscentren, die Perspektivität demnach keine nur zweifache.

Die Konstruktion der einzig möglichen zweifachen ($\mathfrak{uv}$-) Perspektivität macht uns nach den in § 6 vorgenommenen Betrachtungen keine weiteren Schwierigkeiten.

Die Punkte des gesuchten Cyklus $\mathfrak{lmno}$ werden gefunden durch die Beziehungen:

$\mathfrak{l} = (\mathfrak{bu}, \mathfrak{dv})$, $\mathfrak{m} = (\mathfrak{au}, \mathfrak{cv})$, $\mathfrak{n} = (\mathfrak{du}, \mathfrak{bv})$, $\mathfrak{o} = (\mathfrak{cu}, \mathfrak{av})$.

Die hierzu nöthige Voraussetzung, daß $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ sowohl wie $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$ mit $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ in je einer Ebene liegen müssen, wird, wie wir in § 6 nachweisen konnten — denn was von $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}''$ gilt, wird auch von $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ gelten — immer eintreten, ohne daß die Lage der Cykluspunkte an eine Bedingung geknüpft wäre. Wie wir weiter sahen, liegen die Centren $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ auf derselben Axe, harmoniſch getrennt durch die auf ihr liegenden Doppelpunkte der Kollineation.

Wir können daher betreffend die Konstruktion von zweifach perspektiven Cyklen folgenden Satz aussprechen:

Es sei irgend ein Cyklus $\mathfrak{abcd}$ der tetraedralen Kollineation gegeben. Man nimmt das eine Centrum $\mathfrak{u}$ des gesuchten zu $\mathfrak{abcd}$ zweifach perspektiven Cyklus $\mathfrak{lmno}$ beliebig auf einer der beiden Axen $\mathfrak{pp}''$ oder $\mathfrak{p}'\mathfrak{p}'''$ an. Sucht zunächst $\mathfrak{v}$, welches auf derselben Axe liegt, als vierten harmoniſchen Punkt zu $\mathfrak{u}$ und den beiden auf dieser Axe liegenden Doppelpunkten $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ resp. $\mathfrak{p}', \mathfrak{p}'''$. Alsdann verbindet man $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ mit den gegebenen Cykluspunkten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$. Die Schnittpunkte dieser Linien sind die Eckpunkte des

Digitized by Google

gesuchten Cyklus $\mathfrak{lmno}$. Der beliebigen Annahme von $\mathfrak{u}$ auf einer der beiden Axen entsprechend giebt es zwei Serien von Cyklen $\mathfrak{lmno}$, welche mit dem gegebenen in zweifacher Perspektivität stehen.

§ 8. Konstruktion von vierfach perspektiven Cyklen.

Wie wir im vorigen § zeigen konnten, ergänzt sich die zweifache $\mathfrak{pp}''$-Perspektivität immer zu der in § 5 unter 4 gefundenen vierfachen Perspektivität. Ein gleiches wird auch für die außer der $\mathfrak{pp}''$- noch möglichen $\mathfrak{p}'\mathfrak{p}'''$-Perspektivität gelten.

Die Konstruktion von vierfach perspektiven Cyklen muß sich demnach decken mit der Konstruktion von zweifach perspektiven, deren Centren Doppelpunkte der Kollineation sind. Diese Konstruktion wird aber derjenigen analog sein, die wir im vorigen § für die in der $\mathfrak{uv}$-Perspektivität befindlichen Cyklen angegeben haben. Wir dürfen daher betreffend die Konstruktion von vierfach perspektiven Cyklen folgenden Satz aussprechen:

Es sei irgend ein Cyklus $\mathfrak{abcd}$ der tetraedralen Kollineation gegeben. Man verbindet die beiden mit als Centren zu wählenden reellen oder imaginären Doppelpunkte, $\mathfrak{pp}''$ resp. $\mathfrak{p}'\mathfrak{p}'''$, mit den gegebenen Cykluspunkten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$. Die Schnittpunkte dieser Graden seien:

$$\mathfrak{l} = (\mathfrak{ap}, \mathfrak{cp}''),\ \mathfrak{m} = (\mathfrak{bp}, \mathfrak{dp}''),\ \mathfrak{n} = (\mathfrak{cp}, \mathfrak{ap}''),\ \mathfrak{o} = (\mathfrak{dp}, \mathfrak{bp}'')$$
$$\mathfrak{l}' = (\mathfrak{ap}', \mathfrak{cp}'''),\ \mathfrak{m}' = (\mathfrak{bp}', \mathfrak{dp}'''),\ \mathfrak{n}' = (\mathfrak{cp}', \mathfrak{ap}'''),\ \mathfrak{o}' = (\mathfrak{dp}', \mathfrak{bp}''')$$

$\mathfrak{lmno}$ und $\mathfrak{l}'\mathfrak{m}'\mathfrak{n}'\mathfrak{o}'$ sind zu $\mathfrak{abcd}$ vierfach perspektive Cyklen. Zu einem gegebenen Cyklus giebt es also zwei vierfach perspektive Cyklen, und zwar einen reellen und einen imaginären Cyklus.

Wie wir oben sahen, sind $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'', \mathfrak{u}, \mathfrak{v}$, die Centren der auf diese Weise konstruierten vierfach perspektiven Cyklen. Diese

Digitized by Google

vier Punkte bilden zwar keinen neuen Cyklus, wohl aber können wir zeigen, daß auch $\mathfrak{p}\mathfrak{p}''\mathfrak{u}\mathfrak{v}$ ein zu $\mathfrak{abcd}$ und $\mathfrak{lmno}$ vierfach perspektives Tetraeder ist.

Aus den bekannten Beziehungen

$$\mathfrak{p} = (\mathfrak{al}, \mathfrak{bm}, \mathfrak{cn}, \mathfrak{do}) \qquad \mathfrak{u} = (\mathfrak{am}, \mathfrak{bl}, \mathfrak{co}, \mathfrak{dn})$$
$$\mathfrak{p}'' = (\mathfrak{an}, \mathfrak{bo}, \mathfrak{bl}, \mathfrak{dm}) \qquad \mathfrak{v} = (\mathfrak{ao}, \mathfrak{bn}, \mathfrak{cm}, \mathfrak{dl})$$

geht hervor, daß einmal

$$\mathfrak{l} = (\mathfrak{ap}, \mathfrak{bu}, \mathfrak{cp}''\ \mathfrak{dv}) \qquad \mathfrak{n} = (\mathfrak{ap}'', \mathfrak{bv}, \mathfrak{cp}, \mathfrak{du})$$
$$\mathfrak{m} = (\mathfrak{au}, \mathfrak{bp}, \mathfrak{cv}, \mathfrak{dp}'') \qquad \mathfrak{o} = (\mathfrak{av}, \mathfrak{bp}'', \mathfrak{cu}, \mathfrak{dp})$$

und ebenso

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{lp}, \mathfrak{np}'', \mathfrak{mu}, \mathfrak{ov}) \qquad \mathfrak{c} = \mathfrak{lp}'', \mathfrak{np}, \mathfrak{mv}, \mathfrak{ou})$$
$$\mathfrak{b} = (\mathfrak{lu}, \mathfrak{mp}, \mathfrak{nv}, \mathfrak{op}'') \qquad \mathfrak{d} = \mathfrak{lv}, \mathfrak{mu}, \mathfrak{np}''\ \mathfrak{op})$$

Wir bekommen so auf synthetischem Wege den [schon von Vályi (a. a. O.) gefundenen] Satz:

Sind $\mathfrak{abcd}$ und $\mathfrak{lmno}$ zwei vierfach perspektive Tetraeder mit den Centren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{w}$, so sind je zwei der drei Tetraeder $\mathfrak{abcd}$, $\mathfrak{lmno}$ und $\mathfrak{xyzw}$ vierfach perspektiv. Die Centren sind die Ecken des jedesmaligen dritten Tetraeders.

Noch einige Bemerkungen mögen hier Platz finden, die sich indessen ebenfalls nur auf vierfach perspektive Tetraeder beziehen.

1. Der auf Seite 7 erwähnte und auch synthetisch erwiesene Satz Vályi's läßt sich durch einige Ueberlegungen leicht in folgender Fassung auf den Raum ausdehnen:

Sind $\mathfrak{abcd}$ und $\mathfrak{lmno}$ perspektive Tetraeder, Centrum $\mathfrak{C}_1$, Ebene der Perspektivität $\mathfrak{E}_1$, wobei $\mathfrak{C}_1$ die Polarebene $\mathfrak{P}_1$ in Bezug auf $\mathfrak{abcd}$ haben mag, und sind auch die Tetraeder $\mathfrak{abcd}$, $\mathfrak{mlon}$ perspektiv, so schneidet die Schnittlinie der Ebene $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{E}_1$ die Tetraederkanten $\mathfrak{ab}$ und $\mathfrak{cd}$.

Auf die vierfache Perspektivität ausgedehnt, ergiebt sich hieraus sofort der Satz:

Sind $\mathfrak{abcd}$ und $\mathfrak{lmno}$ vierfach perspektive Tetraeder, so fällt das Tetraeder $\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2\mathfrak{E}_3\mathfrak{E}_4$ der vier Ebenen der Perspektivität mit dem Tetraeder $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4$ der vier Polarebenen zusammen.

Digitized by Google

2. Bei Vályi findet sich ferner — Archiv 2. R. 3. T. — der Satz, daß bei der zweifachen Perspektivität das Centrum $\mathfrak{C}_1$ der ersten, auf der Ebene $\mathfrak{E}_2$ der zweiten Perspektivität liegt. Wird auch dies auf die vierfache Perspektivität ausgedehnt, so folgt unmittelbar:

Auch die Tetraeder $\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4$ der vier Centren und $\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2\mathfrak{E}_3\mathfrak{E}_4$ der vier Ebenen der Perspektivität müssen zusammenfallen.

3. Aus den beiden Sätzen in 1 und 2 läßt sich der weitere ableiten:

Sind zwei Tetraeder $\mathfrak{abcd}$ und $\mathfrak{lmno}$ vierfach perspektiv, und sind $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$, $\mathfrak{C}_4$ resp. $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$, $\mathfrak{E}_4$ die Centren resp. Ebenen der Perspektivität, so ist in dem Tetraeder $\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4 = \mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2\mathfrak{E}_3\mathfrak{E}_4$ jede Fläche die Polarebene des gegenüberliegenden Endpunktes in Bezug auf jedes der beiden Tetraeder $\mathfrak{abcd}$ und $\mathfrak{lmno}$.

Dritter Abschnitt.

Mehrfach hyperboloidische Cyklen der tetraedralen Kollineation.

§ 9. Mehrfach hyperboloidische Tetraeder.

Neben der perspektiven Lage zweier Tetraeder ist auch die hyperboloidische Lage von Interesse. Schur hat sich in einer Abhandlung: „Ueber Flächen 4. Ordnung" (Annalen XX) mit der hyperboloidischen Lage zweier Tetraeder näher befaßt. Er erledigt dort die Frage, welche weiteren hyperboloidischen Lagen zweier Tetraeder $\mathfrak{abcd}$ und $\mathfrak{a'b'c'd'}$ neben den vier Lagen

$$(1)\ \begin{pmatrix}\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\\ \mathfrak{a'}\mathfrak{b'}\mathfrak{c'}\mathfrak{d'}\end{pmatrix},\ (2)\ \begin{pmatrix}\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\\ \mathfrak{b'}\mathfrak{c'}\mathfrak{d'}\mathfrak{a'}\end{pmatrix},\ (3)\ \begin{pmatrix}\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\\ \mathfrak{c'}\mathfrak{d'}\mathfrak{a'}\mathfrak{b'}\end{pmatrix},\ (4)\ \begin{pmatrix}\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\\ \mathfrak{d'}\mathfrak{a'}\mathfrak{b'}\mathfrak{c'}\end{pmatrix}$$

Digitized by Google

noch vorkommen können. Schur untersucht sämtliche 24 mögliche Fälle und kommt zu dem Schluß, daß solche Tetraeder nur noch fünf-, acht- oder neunfach hyperboloidifch liegen können.

Die fünffach hyperboloidifche Lage kommt zustande (§ 7), wenn zu den angegebenen Lagen 1—4 noch die Lage (5) $\begin{pmatrix}\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\\ \mathfrak{c}'\mathfrak{b}'\mathfrak{a}'\mathfrak{d}'\end{pmatrix}$ hinzukommt, während zur neunfach hyperboloidifchen Lage (§ 4) zu diesen fünf noch die vier weiteren: (b. Schurr 9, 15, 17, 24)

(6) $\begin{pmatrix}\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\\ \mathfrak{a}'\mathfrak{d}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\end{pmatrix}$, (7) $\begin{pmatrix}\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\\ \mathfrak{a}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'\mathfrak{b}'\end{pmatrix}$, (8) $\begin{pmatrix}\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\\ \mathfrak{b}'\mathfrak{d}'\mathfrak{c}'\mathfrak{a}'\end{pmatrix}$, (9) $\begin{pmatrix}\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\\ \mathfrak{d}'\mathfrak{a}'\mathfrak{c}'\mathfrak{b}'\end{pmatrix}$

sich hinzugesellen müssen.

Für die noch weiter als möglich erkannte achtfach hyperboloidifche Lage zeigt sich aber (§ 7), daß alsdann sowohl die Tetraederpunkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ als auch $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$ auf je einer Geraden liegen müssen. Wir haben es also dann mit uneigentlichen Tetraedern zu thun und dürfen diesen Fall außer acht lassen.

Für unsere weiteren Untersuchungen ist es also von Wichtigkeit, daß Schur die Möglichkeit des Bestehens einer fünf- und neunfachen hyperboloidifchen Lage zweier eigentlichen Tetraeder nachgewiesen hat. Wir stellen uns die Frage, sind auch fünf- und neunfach hyperboloidifche Cyklen der tetraedralen Kollineation möglich?

§ 10. Fünffach hyperboloidische Cyklen.

Nach Schröter besitzen zwei beliebige Cyklen der tetraedralen Kollineation $\mathfrak{abcd}$ und $\mathfrak{xyzt}$ sicher die vier hyperboloidifchen Lagen:

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{abcd}\\ \mathfrak{tzyx}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathfrak{abcd}\\ \mathfrak{zyxt}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathfrak{abcd}\\ \mathfrak{yxtz}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathfrak{abcd}\\ \mathfrak{xtzy}\end{pmatrix}$$

Zur fünffach hyperboloidifchen Lage ist nach den vorerwähnten Resultaten von Schur die Lage $\begin{pmatrix}\mathfrak{abcd}\\ \mathfrak{yztx}\end{pmatrix}$ nötig.

Nach Schur (§ 4 sind zwei Tetraeder mit den Lagen 1, 3, 5 gleichzeitig ein- und umgefchrieben. Dies muß also auch bei

Digitized by Google

fünffach hyperboloidifcher Lage der Fall sein. Zwei gleichzeitig ein- und umgefchriebene Tetraeder haben aber, wie fchon Steiner bemerkte, von selbst die Lagen 2, 4, 5, und ferner ist von Schur gezeigt, daß wenn zwei solcher Tetraeder zugleich noch die Lagen 2 und 4 besitzen, die Punkte $(\mathfrak{ac}, \mathfrak{bz})$ und $(\mathfrak{ac}, \mathfrak{dx})$ harmonifch zu den Punkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ liegen. Dasselbe muß aber bei Cyklen auch von den Punkten:

$\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $(\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1, \mathfrak{b}_1\mathfrak{z}_1)$, $(\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1\mathfrak{x}_1)$ d. h. von $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}$, $(\mathfrak{db}, \mathfrak{ay})$, $(\mathfrak{db}, \mathfrak{ct})$ gelten.

Es liegen also auch die vier Ebenen $\mathfrak{acd}$, $\mathfrak{acb}$, $\mathfrak{acy}$, $\mathfrak{act}$ harmonifch, wenn die Cyklen $\mathfrak{abcd}$ und $\mathfrak{xyzt}$ fünffach hyperboloidifch liegen.

Es seien $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ die Doppelpunkte der tetraedralen Kollineation, ferner $s = \mathfrak{pq}$ und $t = \mathfrak{rs}$ die Axen der durch zweimalige Anwendung der Kollineation entstandenen gefcharten Involution. Durch diese geht das Ebenenbüfchel

$|\mathfrak{ac}|$ $(\mathfrak{bdxyztpr})$ über in $|\mathfrak{ca}|$ $(\mathfrak{dbztxypr})$

Diese beiden coaxialen involutorifchen Ebenenbüfchel haben die Doppelebenen $\mathfrak{acp}$ und $\mathfrak{acr}$, d. h. die Ebenen, welche bestimmt sind durch die Gerade $\mathfrak{ac}$ und die Axen s resp. t, und die wir mit $[\mathfrak{ac}, s]$ resp. $[\mathfrak{ac}, t]$ bezeichnen wollen. Nun bilden $\mathfrak{acy}$ und $\mathfrak{act}$ ein Paar entsprechende Ebenen der Involution.

Es müssen also die Ebenen $\mathfrak{acy}$ und $\mathfrak{act}$ mit den Ebenen $[\mathfrak{ac}, s]$ und $[\mathfrak{ac}, t]$ harmonifch liegen.

Oben fanden wir, daß die Ebenen $\mathfrak{acy}$ und $\mathfrak{act}$ auch zu den Ebenen $\mathfrak{acd}$ und $\mathfrak{acb}$ harmonifch liegen. Erstere sind demnach die Doppelebenen der durch die beiden Ebenenpaare $\mathfrak{acb}$ und $[\mathfrak{ac}, s]$, $[\mathfrak{ac}, t]$ festgelegten Involution und sind als solche vollständig bestimmt, wenn nur $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, s und t gegeben sind. In der tetraedralen Kollineation entsprechen sich die Ebenenpaare:

$\mathfrak{acb}$, $\mathfrak{acd}$	$\mathfrak{bdc}$, $\mathfrak{bda}$	$\mathfrak{acd}$, $\mathfrak{acb}$	$\mathfrak{bda}$, $\mathfrak{bdc}$
$\mathfrak{ac}s$, $\mathfrak{ac}t$	$\mathfrak{bd}s$, $\mathfrak{bd}t$	$\mathfrak{ac}s$, $\mathfrak{ac}t$	$\mathfrak{bd}s$, $\mathfrak{bd}t$

Bezeichnen wir $\mathfrak{acy} = \varkappa$ und $\mathfrak{act} = \mu$, so entsprechen sich $\varkappa$ und μ bei zweimaliger Anwendung der Kollineation gegenseitig. Bilden diese beiden Ebenen mit den beiden weiteren λ und ν einen Cyklus: $\varkappa_1 = \nu$, $\lambda_1 = \varkappa$, $\mu_1 = \lambda$, $\nu_1 = \mu$, so ist das vierte harmonifche Ebenenpaar zu den oben bezeichneten Ebenenpaaren bezüglich $\varkappa, \mu | \lambda, \nu | \mu, \varkappa | \nu, \lambda$

Digitized by Google

Nun muß, wegen der gleichzeitig ein- und umgeſchriebenen Lage der beiden Tetraeder, $\mathfrak{y}$ in der Ebene $\mathfrak{abd}$, ferner aber auch in einer der Ebenen $\mathfrak{acy} = \varkappa$ oder $\mathfrak{act} = \mu$ liegen, d. h. $\mathfrak{y}$ muß entweder in der Schnittlinie von $\mathfrak{abd}$ mit $\varkappa$ oder von $\mathfrak{abd}$ mit μ liegen.

Bezeichnen wir diese Schnittlinien und die ihnen entsprechenden mit:

$$\begin{vmatrix}\varkappa, & \mathfrak{abd}\end{vmatrix} = k, \quad \begin{vmatrix}\lambda, & \mathfrak{abc}\end{vmatrix} = l, \quad \begin{vmatrix}\mu, & \mathfrak{cbd}\end{vmatrix} = m, \quad \begin{vmatrix}\nu, & \mathfrak{acd}\end{vmatrix} = n$$
$$\begin{vmatrix}\mu, & \mathfrak{abd}\end{vmatrix} = k', \quad \begin{vmatrix}\nu, & \mathfrak{acb}\end{vmatrix} = l', \quad \begin{vmatrix}\varkappa, & \mathfrak{cbd}\end{vmatrix} = m', \quad \begin{vmatrix}\lambda, & \mathfrak{acd}\end{vmatrix} = n'$$

so ist sowohl klmn als auch k,l'm'n' jedes ein Cyklus der tetraedralen Kollineation:

$k_1 = n,\ l_1 = k,\ m_1 = l,\ n_1 = m;\ k_1' = n',\ l_1' = k',\ m_1' = l',\ n_1' = m'$

Wenn $\mathfrak{y}$ also auf k liegt, so fällt von selbst $\mathfrak{x}$ auf n, $\mathfrak{t}$ auf m und $\mathfrak{z}$ auf l; wenn aber $\mathfrak{y}$ auf k' liegt, so fallen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{z}$ der Reihe nach auf n', m' und l'. Fünffach hyperboloidiſche Cyklen mit den Lagen 1 — 5 sind also möglich und zwar giebt es deren, da $\mathfrak{y}$ auf k oder k' willkürlich angenommen werden kann, zwei Serien.

Wir dürfen also den Satz ausſprechen:

Zu einem gegebenen Cyklus $\mathfrak{abcd}$ giebt es zwei einfache Serien fünffach hyperboloidiſcher Cyklen $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$. Nimmt man $\mathfrak{y}$ auf einer der durch $\mathfrak{a}$ gehenden Schnittlinie k oder k' der Ebene $\mathfrak{abd}$ mit den Doppelebenen der durch die Ebenenpaare $\mathfrak{acb}$, $\mathfrak{acd}$ und $[\mathfrak{ac}, s]$, $[\mathfrak{ac}, t]$ festgelegten Involution beliebig an, so fällt von selbst $\mathfrak{z}$ auf die durch $\mathfrak{b}$ gehende Linie l resp. l', $\mathfrak{t}$ auf die durch $\mathfrak{c}$ gehende Linie m resp. m' und $\mathfrak{x}$ auf die durch $\mathfrak{b}$ gehende Linie n resp. n'.

Nachdem die Frage, ob fünffach hyperboloidiſche Cyklen möglich sind, in bejahendem Sinne beantwortet ist, können wir folgende weiteren Betrachtungen anſtellen, aus denen ſich eine zweite Konſtruktion von fünffach hyperboloidiſchen Cyklen ergeben wird.

Es seien uns gegeben die beiden in fünffach hyperboloidiſcher Lage befindlichen Cyklen $\mathfrak{abcd}$ und $\mathfrak{xyzt}$, außerdem das Hyperboloid $H_5 = (\mathfrak{ay}, \mathfrak{bz}, \mathfrak{ct}, \mathfrak{dx})$. $k = \mathfrak{ay}$, $l = \mathfrak{bz}$, $m = \mathfrak{ct}$, $n = \mathfrak{dx}$ sind dann Strahlen einer Regelſchar des Hyperboloides und bilden

Digitized by Google

einen Cyklus: $k_1 = n$, $l_1 = k$, $m_1 = l$, $n_1 = m$. Es sei ferner e ein Strahl der anderen Regelſchar von H_5 und efgh der hierdurch bestimmte Cyklus; $e_1 = h$, $h_1 = g$, $g_1 = f$, $f_1 = e$, so ſchneidet sowohl e die Strahlen des Cyklus klmn und $e_1 = h$ die Strahlen des Cyklus $k_1 l_1 m_1 n_1$ d. i. nklm. Das gleiche gilt auch von den anderen Strahlen. Die Strahlen efgh ſchneiden also jeden Strahl des Cyklus klmn. Letztere gehören sämtlich der ersten, erstere also sämtlich der zweiten Regelſchar des Hyperboloides an.

Umgekehrt hätte ebenso gezeigt werden können, daß, wenn e ein beliebiger Strahl der ersten Regelſchar gewesen wäre, auch f, g, h ihr angehört hätten. Ist allgemein e ein beliebiger Strahl des Hyperboloides, so liegen sämtliche Strahlen des Cyklus efgh auf dem Hyperboloid.

Wir dürfen also behaupten:

> Das Hyperboloid $H_5 = (\mathfrak{a}\mathfrak{y}, \mathfrak{b}\mathfrak{z}, \mathfrak{c}\mathfrak{t}, \mathfrak{d}\mathfrak{x})$ entspricht sich selbst, da jedem seiner Strahlen vermöge der tetraedralen Kollineation wieder ein solcher entspricht.

Nehmen wir nun umgekehrt an, durch den Cyklus $\mathfrak{abcd}$ gehe ein beliebiges Hyperboloid, welches sich in der eben betrachteten Weise selbst entspricht. Dann geht z. B. durch $\mathfrak{a}$ ein Strahl k der einen und ein Strahl k' der anderen Regelſchar. Zunächst ist dann klar, daß die durch k bezw. k' bestimmten Cyklen: klmn bezw. k'l'm'n' ganz in der ersten bezw. zweiten Regelſchar liegen müssen. Nimmt man weiter einen Punkt etwa $\mathfrak{y}$ auf k resp. k' beliebig an, so wird von selbst die zu $\mathfrak{y}$ gehörigen Cykluspunkte $\mathfrak{z}$ auf l resp. l', $\mathfrak{t}$ auf m resp. m' und $\mathfrak{x}$ auf n resp. n' fallen. Diese so erhaltenen Serien von Cyklen $\mathfrak{xyzt}$ liegen demnach zu $\mathfrak{abcd}$ fünffach hyperboloidiſch und zwar sämtlich auf H_5. Ein weiteres durch $\mathfrak{abcd}$ gehendes sich selbst entsprechendes Hyperboloid kann es auch nicht geben, da es sonst auf ihm zwei weitere Serien von zu $\mathfrak{abcd}$ fünffach hyperboloidiſch gelegenen Cyklen $\mathfrak{xyzt}$ geben müßte, das ist aber nach dem früher Gefundenen nicht möglich.

Wir kommen also zu der weiteren Erkenntnis:

> Ist ein beliebiger Cyklus $\mathfrak{abcd}$ gegeben, so geht durch ihn nur ein einziges sich selbst entsprechendes Hyperboloid H_5. Auf diesem liegen dann die beiden Serien der zu $\mathfrak{abcd}$ fünffach hyperboloidiſchen Cyklen $\mathfrak{xyzt}'$, welche man

Digitized by Google

dadurch erhält, daß man $\mathfrak{y}$ auf einem der durch $\mathfrak{a}$ gehenden Hyperboloidstrahlen beliebig annimmt.

Wir stellen uns nun weiter folgende Frage. Die tetraedrale Kollineation enthält sechs Doppelstrahlen. Es sind dies die beiden Involutionsaxen s = $\mathfrak{pq}$ und t = $\mathfrak{rs}$, ferner die Geraden $\mathfrak{pr}$, $\mathfrak{qs}$, $\mathfrak{ps}$, $\mathfrak{qr}$. Wie verteilen sich dieselben unter die beiden Regelscharen des Hyperboloides?

Wir zeigen zunächst, daß jede dieser beiden Regelscharen zwei der Doppellinien enthält.

Es sei abcd ein Cyklus der einen, efgh ein solcher der anderen Regelschar des Hyperboloides H_5. Dieses wird dann erzeugt durch die projektiven Ebenenbüschel

$$e\,(abcd) \;\overline{\wedge}\; f\,(bcda)$$

Vermöge der tetraedralen Kollineation ist aber auch

$$e\,(abcd) \;\overline{\wedge}\; e\,(bcda)$$

Diese beiden coaxialen projektiven Ebenenbüschel besitzen zwei Doppelebenen ex = ε und ex' = ε', wo x und x' Strahlen der ersten Regelschar sind, denn jede durch den Strahl e, welcher der zweiten Regelschar angehören soll, gehende Ebene — also auch die beiden Doppelebenen — enthält einen Strahl der anderen Regelschar. Den Strahlen x, x' entsprechen die Strahlen x_1, x_1', und da ex und ex' Doppelebenen sind, so müssen die Ebenen ex und ex_1, sowie ex' und ex_1', zusammenfallen, es müssen sich also x und x_1 schneiden, ebenso x' und x_1'. Es können sich aber Strahlen derselben Regelschar nicht schneiden, es muß also Strahl x $\equiv$ x_1 und Strahl x' $\equiv$ x_1' sein, d. h. x und x' sind Doppelstrahlen der tetraedralen Kollineation und liegen beide auf der ersten Regelschar. Ebenso kann gezeigt werden, daß auch die zweite Regelschar zwei der sechs Doppelstrahlen enthält. Welche vier Strahlen sind dies nun? Es müssen die Doppelstrahlen $\mathfrak{pr}$, $\mathfrak{qs}$ resp. $\mathfrak{ps}$, $\mathfrak{qr}$ sein, denn wir können noch zeigen, daß die beiden noch weiter vorhandenen Doppelstrahlen, die beiden Involutionsaxen s und t, gar nicht auf dem Hyperboloid liegen.

Läge etwa s auf dem Hyperboloid und gehörte der zweiten Regelschar an, so müßte diese Axe von sämtlichen Strahlen der ersten Regelschar geschnitten werden, also auch von den Strahlen des dieser ersten Regelschar angehörigen Cyklus klmn. Nun geht

Digitized by Google

aber k durch a, m durch c. Die Diagonale ac des Quadrupels abcd begegnet aber, wie Schröter (Annal. XX. S. 250) zeigt, jeder der beiden Involutionsaxen, also außer s auch t. In der durch t und ac bestimmten Ebene müßte also k und m liegen, da beide aber einer — der ersten — Regelſchar angehören, können sie sich nicht ſchneiden. s kann also nicht der zweiten, ebensowenig der ersten Regelſchar angehören. Dasselbe gilt natürlich auch für t. Beide Involutionsaxen fallen nicht auf das Hyperboloid.

Wir können also den Satz aussprechen:

Die beiden Involutionsaxen s = pq und t = rs liegen nicht auf dem Hyperboloid H_5. Dagegen enthält dasselbe in der einen Regelſchar die Doppellinien pr und qs, in der andern Regelſchar die Doppellinien ps und qr.

Aus diesem Satze können wir nun die bereits angekündigte zweite Konstruktion der zu abcd fünffach hyperboloidiſchen Cyklen xyzt ableiten. ay muß nach dem vorhergehenden entweder k oder k sein. k geht aber als Strahl der ersten Regelſchar durch a und ſchneidet die zur zweiten Regelſchar gehörenden Doppelstrahlen ps und qr, ist also vollständig bestimmt. Ebenso ist k dadurch völlig bestimmt, daß dieser Strahl ebenfalls durch a geht und die beiden Doppelstrahlen der ersten Regelſchar, pr und qs, ſchneidet.

Die zweite Möglichkeit fünffach hyperboloidiſche Cyklen zu konstruieren, läßt sich also so ausdrücken:

Um die zu einem gegebenen Cyklus abcd fünffach hyperboloidiſchen Cyklen xyct zu finden, legt man einen Strahl durch a sowie die Doppellinien ps und qr, einen anderen Strahl durch a und die Doppellinien qs und pr. Nimmt man dann d auf einem dieser beiden Strahlen beliebig an, so liegt der hierdurch festgelegte Cyklus xyzt zu abcd fünffach hyperboloidiſch. Es giebt deren auch hier zwei einfache Serien.

Digitized by Google

§ 11. Neunfach hyperboloidische Cyklen.

Die neunfach hyperboloidische Lage zweier Tetraeder kommt, wie bereits erwähnt, zustande, wenn neben den eben betrachteten Lagen 1 — 5 die Seite 32 bezeichneten Lagen 6 — 9 hinzutreten. Schur zeigt (a. a. O. S. 272 ff.), daß die Lage 6 die Lage 7, 8 und 9 zur Folge hat. Dies ist auch bei Cyklen der Fall.

Sind $\mathfrak{abcd}$ und $\mathfrak{xyzt}$ Cyklen der tetraedralen Kollineation, so folgt vermöge derselben aus Lage (6) $\begin{pmatrix}\mathfrak{abcd}\\ \mathfrak{txzy}\end{pmatrix}$ die Lage (7) $\begin{pmatrix}\mathfrak{abcd}\\ \mathfrak{tyxz}\end{pmatrix}$ aus dieser die Lage (9) $\begin{pmatrix}\mathfrak{abcd}\\ \mathfrak{xtyz}\end{pmatrix}$, aus dieser die Lage (8) $\begin{pmatrix}\mathfrak{abcd}\\ \mathfrak{zxyt}\end{pmatrix}$, und aus dieser wieder die Lage (6) — daß dies wirklich die Lagen 6—9 bei Schur sind, ergiebt sich wenn man $\mathfrak{a}' = \mathfrak{t}$, $\mathfrak{b}' = \mathfrak{z}$, $\mathfrak{c}' = \mathfrak{y}$, $\mathfrak{d}' = \mathfrak{x}$ setzt —.

Während sich also, wie Schröter zeigt, die Hyperboloide H_1 und H_3 sowie H_2 und H_4 wechselseitig entsprechen, und das Hyperboloid H_5 sich selbst entspricht, bilden die Hyperboloide H_6 — H_9 einen Cyklus. Neunfach hyperboloidische Cyklen sind also möglich, wie können sie nun konstruiert werden?

Wegen der nötigen Lage 1—5 muß, wie gezeigt, $\mathfrak{d}$ auf eine der Geraden k oder k′ fallen, welche in der Ebene $\mathfrak{abd}$ liegen und durch den Cykluspunkt $\mathfrak{a}$ gehen. Es fallen dann von selbst $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{x}$ auf resp. l oder l′, m oder m′, n oder n′. Sind aber weiter noch die Lage 6—9 vorhanden, so werden (Schur. S. 276 die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$ durch die Punkte ($\mathfrak{ad}$, $\mathfrak{dy}$), ($\mathfrak{ad}$, $\mathfrak{cx}$) harmonisch getrennt, d. h. die Ebenen $\mathfrak{bca}$, $\mathfrak{bcd}$, $\mathfrak{bcy}$, $\mathfrak{bcx}$ liegen harmonisch. Vermöge der Kollineation muß dies auch von den Ebenen $\mathfrak{abd}$, $\mathfrak{abc}$, $\mathfrak{abx}$, $\mathfrak{abt}$ gelten. Beide Doppelverhältnisse sind, auch wenn man die Ebenen eines Paares vertauscht, = — 1, also besteht die Projektivität:

$$[\mathfrak{bc}]\ (\mathfrak{adxy}) \wedge [\mathfrak{ab}]\ (\mathfrak{dcxt})$$

Die Axen dieser beiden projektiven Ebenenbüschel, $\mathfrak{bc}$ und $\mathfrak{ab}$, schneiden sich in $\mathfrak{b}$, also liegen die Schnittlinien entsprechender Ebenen nicht, wie das im allgemeinen der Fall ist, auf einem Hyperboloid, sondern auf einem Kegel mit der Spitze $\mathfrak{b}$.

Dieser Kegel enthält die Schnittlinien $\mathfrak{ab}$ der Ebenen $\mathfrak{bca}$ und $\mathfrak{bad}$, $\mathfrak{bc}$ der Ebenen $\mathfrak{bcd}$ und $\mathfrak{abc}$ und $\mathfrak{bx}$ der Ebenen $\mathfrak{bcx}$ und $\mathfrak{abx}$.

Digitized by Google

$\mathfrak{x}$ liegt also auf dem Kegel $\mathfrak{B}$ mit der Spitze $\mathfrak{b}$
$\mathfrak{t}$ „ auf dem entsprechenden Kegel $\mathfrak{A}$ mit der Spitze $\mathfrak{a}$
$\mathfrak{z}$ „ „ „ „ „ $\mathfrak{D}$ „ „ „ $\mathfrak{d}$
$\mathfrak{y}$ „ „ „ „ „ $\mathfrak{C}$ „ „ „ $\mathfrak{c}$

Der Kegel $\mathfrak{B}$ schneide die Ebene $\mathfrak{acd}$ im Kegelschnitt b
„ „ $\mathfrak{A}$ „ „ „ $\mathfrak{bcd}$ „ „ a
„ „ $\mathfrak{D}$ „ „ „ $\mathfrak{abc}$ „ „ d
„ „ $\mathfrak{C}$ „ „ „ $\mathfrak{abd}$ „ „ c

Da nun, wie wir sahen, $\mathfrak{y}$ in der Ebene $\mathfrak{abd}$ liegen muß, so liegt es auf dem Kegelschnitt c, u. s. w.

Es liegt demnach

$\mathfrak{y}$ auf dem Kegelschnitt c sowie auf den Geraden k oder k′
$\mathfrak{z}$ „ „ „ d „ „ „ „ l „ l′
$\mathfrak{t}$ „ „ „ a „ „ „ „ m „ m′
$\mathfrak{x}$ „ „ „ b „ „ „ „ n „ n′

Da ein Kegelschnitt von zwei Geraden im allgemeinen in vier Punkten geschnitten wird, so können für Punkt $\mathfrak{y}$ vier Punkte gewählt werden, die drei übrigen Cykluspunkte fallen dann von selbst in die bezeichneten Schnittpunkte.

Es lassen sich also zu einem gegebenen Cyklus $\mathfrak{abcd}$ vier neunfach hyperboloidische Cyklen $\mathfrak{xyzt}$ konstruieren.

Es erübrigt nun noch den Kegel $\mathfrak{B}$ etwas genauer zu bestimmen. Wir hatten oben die Projektivität

$$[\mathfrak{bc}]\ (\mathfrak{adxy})\ \barwedge\ [\mathfrak{ab}]\ (\mathfrak{bcxt})$$

Hieraus folgt vermöge der bestehenden Kollineation die weitere Projektivität

$$[\mathfrak{ab}]\ (\mathfrak{bctx})\ \wedge\ [\mathfrak{ab}]\ (\mathfrak{bcxt})$$

Diese beiden coaxialen Ebenenbüschel haben $\mathfrak{abd}$ und $\mathfrak{abc}$ zu Doppelebenen, d. s. die beiden sich in $\mathfrak{ab}$ schneidenden Tetraederflächen, ferner bilden $\mathfrak{abt}$ und $\mathfrak{abx}$ ein Paar sich wechselseitig entsprechender Ebenen. Diese vier Ebenen, $\mathfrak{abd}$, $\mathfrak{abc}$, $\mathfrak{abt}$ und $\mathfrak{abx}$ liegen, wie wir früher sahen, harmonisch, wir haben es also mit einer Involution zu thun. Es liegen aber auch $\mathfrak{abc}$, $\mathfrak{abd}$, $\mathfrak{abp}$, $\mathfrak{abq}$ sowie $\mathfrak{abc}$, $\mathfrak{abd}$, $\mathfrak{abr}$, $\mathfrak{abs}$ harmonisch, wo, wie früher schon, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$

Digitized by Google

die auf den Involutionsaxen liegenden Doppelpunkte der Kollineation sind.

Es sind also auch $\mathfrak{abp}$, $\mathfrak{abq}$ und $\mathfrak{abr}$, $\mathfrak{abs}$ Ebenenpaare der Involution. Es ist also

$$[\mathfrak{ab}]\ (\mathfrak{dctxpqrs})\ \overline{\wedge}\ [\mathfrak{ab}]\ (\mathfrak{dcxtqpsr})$$

Vermöge der bestehenden Kollineation folgt, daß auch

$$[\mathfrak{bc}]\ (\mathfrak{adxypqrs})\ \overline{\wedge}\ [\mathfrak{ab}]\ (\mathfrak{dcxtqpsr})$$

Mit Hilfe dieser Projektivität ist der Kegel $\mathfrak{B}$ nun bestimmt durch die drei Paare entsprechender Ebenen

$$\mathfrak{bca},\ \mathfrak{abd};\ \mathfrak{bcd},\ \mathfrak{abc};\ \mathfrak{bcp},\ \mathfrak{abq}.$$

Die Konstruktion von neunfach hyperboloidischen Cyklen können wir daher in folgender Weise ausführen.

Gegeben sei der Cyklus $\mathfrak{abcd}$. Die Ebenenpaare

$$\mathfrak{abc},\ \mathfrak{abd};\ \mathfrak{bcd},\ \mathfrak{abc};\ \mathfrak{bcp},\ \mathfrak{abq}$$

bestimmen zwei projektive Ebenenbüschel, welche einen Kegel $\mathfrak{B}$ erzeugen. Legt man einen Punkt $\mathfrak{y}$ in einen der vier Schnittpunkte dieses Kegels mit den bei der Konstruktion der fünffach hyperboloidischen Cyklen aufgetretenen Geraden k oder k', so ist der durch $\mathfrak{y}$ bestimmte Cyklus $\mathfrak{xyzt}$ mit $\mathfrak{abcd}$ neunfach hyperboloidisch.



Digitized by Google

Lebenslauf.

Am 28. Sept. 1863 wurde ich zu Bessungen, Kreis Darmstadt, geboren. Von meinem Onkel, Pfarrer Uhrig, dermalen in Altenstadt, von meinem vierten Jahre an erzogen, besuchte ich, demselben an die verschiedenen Orte seiner Wirksamkeit folgend, die Volksschule zu Holzhausen b. Gl., die höh. Bürgerschule zu Biedenkopf, die Realschule II. O. zu Gr. Umstadt. Zu Ostern 1884 bestand ich an der Realschule I. O. zu Gießen die Maturitätsprüfung. Hierauf bezog ich die Universität Gießen, der ich ununterbrochen angehörte bis zu meiner im Sommer 1888 erfolgten Staatsprüfung, welche sich über Mathematik, Physik und Mineralogie erstreckte. Während meiner Studienzeit hörte ich Vorlesungen bei den Herrn Professoren Dr. Dr. Baltzer, Fromme, Oncken, Pasch, v. Ritgen, Röntgen, Schiller, Siebeck und Streng, welchen ich für die erhaltene Belehrung stets dankbar bleiben werde.

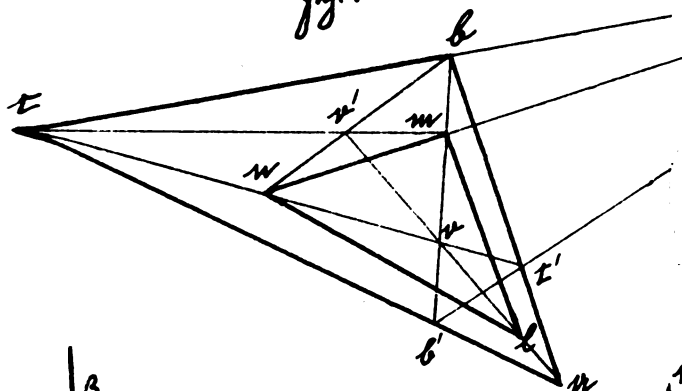
Von Herbst 1888 bis dahin 1889 gehörte ich dem pädagogischen Seminar an dem Gymnasium zu Gießen als ordentliches Mitglied an. Im Laufe des Sommers 1889 wurde ich jedoch aushilfsweise an der Realschule und dem Progymnasium zu Alzey verwendet. Von Okt. 1889 bis Ostern d. J. war ich alsdann als Hauslehrer in Oberingelheim thätig. Seit dem 20. April d. J. ist mir die prov. Verwaltung einer Lehrstelle an der hiesigen Realschule und dem Progymnasium übertragen.

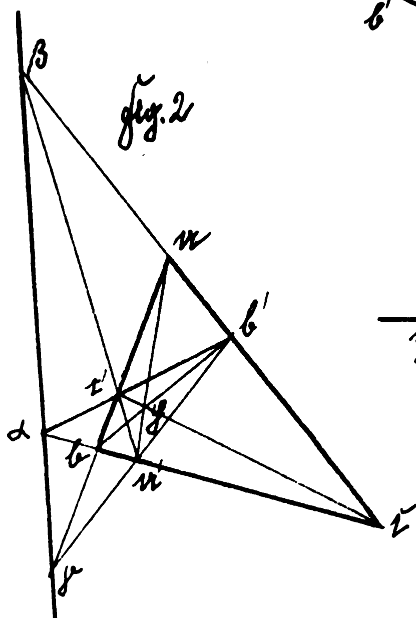
Friedberg, Ende Oktober 1891.

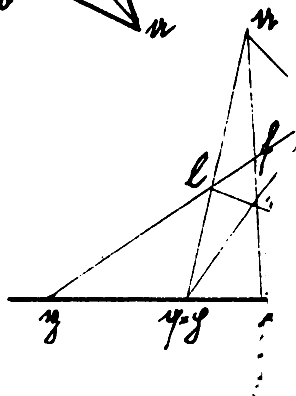
Karl Uhrig.

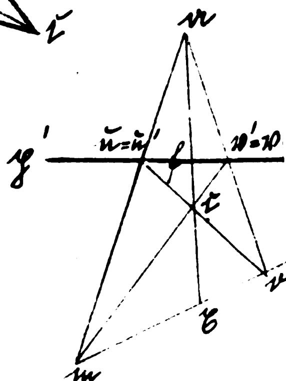
Digitized by Google

Digitized by Google









Digitized by Google

Digitized by Google

RETURN TO→ CIRCULATION DEPARTMENT
202 Main Library

LOAN PERIOD 1 HOME USE	2	3
4	5	6

NRLF

ALL BOOKS MAY BE RECALLED AFTER 7 DAYS

Renewals and Recharges may be made 4 days prior to the due date.

Books may be Renewed by calling 642-3405

DUE AS STAMPED BELOW

SENT ON ILL
OCT 2 5 1995
U. C. BERKELEY

APR 1 7 1996

MAY 1 2 1995
CIRCULATION DEPT.

SENT ON ILL
APR 2 5 1996
U. C. BERKELEY

FORM NO. DD6

UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY
BERKELEY, CA 94720

Digitized by Google

YD 00167







Digitized by Google

Digitized by Google